Exercice 1 :

$f(x)$ existe $\Longleftrightarrow x^3 \neq 0$ et $x \geq 0$ donc $D_f =]0; +\infty[$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$f = u \times v$ avec $u : x \longmapsto 2x + 1 - \dfrac{1}{x^3}$ et $v : x \longmapsto \sqrt{x}$

alors $f' = u'v + uv'$ et $u' : x \longmapsto 2 - \dfrac{-3}{x^4}$ et $v' : x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = (2 + \dfrac{3}{x^4})\sqrt{x} + (2x + 1 - \dfrac{1}{x^3}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \left[(2 + \dfrac{3}{x^4})2x + (2x + 1 - \dfrac{1}{x^3})\right] \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \left[4x + \dfrac{6}{x^3} + 2x + 1 - \dfrac{1}{x^3}\right] \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{6x^4 + x^3 + 6 - 1}{x^3} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x^4 + x^3 + 6 - 1}{2x^3\sqrt{x}}$

$g(x)$ existe $\Longleftrightarrow 4 - 3x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \dfrac{4}{3}$ donc $D_g = \left]-\infty; \dfrac{4}{3}\right]$.

$g = u(4 - 3x)$ avec $u : x \longmapsto \sqrt{x}$

comme u est dérivable sur $]0; +\infty[$, g est dérivable si $4 - 3x > 0$ soit g dérivable sur $\left]-\infty; \dfrac{4}{3}\right[$

$g'(x) = -3 \times u'(4 - 3x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{4 - 3x}}$.

$h(x)$ existe $\Longleftrightarrow 3x - 5 \neq 0$ donc $D_h = \left]-\infty; \dfrac{5}{3}\right[\cup \left]\dfrac{5}{3}; +\infty\right[$.

h étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition.

$h = u(3x - 5)$ avec $u : x \longmapsto \dfrac{1}{x^4}$ donc $h'(x) = 3 \times u'(3x - 5)$ or $u' : x \longmapsto \dfrac{-4}{x^5}$ donc $h'(x) = \dfrac{-12}{(3x - 5)^5}$.

Exercice 2 :

1. $f(x)$ existe $\Longleftrightarrow x + 3 \neq 0$ donc $D_f =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$.
2. $A(x; y)$ est un point de l'axe des ordonnées et de $\mathcal{C}_f \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$

   $f(0) = \dfrac{5}{3}$ donc $A(0; \dfrac{5}{3})$ est le point d'intersection de l'axe des ordonnées et de $\mathcal{C}_f$
3. f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition.

   $f'(x) = \dfrac{6x(x + 3) - 1 \times (3x^2 + 5)}{(x + 3)^2} = \dfrac{6x^2 + 18x - 3x^2 - 5)}{(x + 3)^2} = \dfrac{3x^2 + 18x - 5}{(x + 3)^2}$
4. Recherche des racines de $3x^2 + 18x - 5$:

   $\Delta = 384$ donc on a deux racines réelles

   $x_1 = \dfrac{-18 + 8\sqrt{6}}{6} = \dfrac{2(-9 + 4\sqrt{6})}{2 \times 3} = \beta$ et $x_2 = \dfrac{-18 - 8\sqrt{6}}{6} = \dfrac{2(-9 - 4\sqrt{6})}{2 \times 3} = \alpha$

   ainsi $3x^2 + 18x - 5 = 3(x - \alpha)(x - \beta)$ et donc pour tout $x \in \mathbb{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{3(x - \alpha)(x - \beta)}{(x + 3)^2}$.
5.

x	$-\infty$		α		-3		β		$+\infty$
$3x^2 + 18x - 5$		+	0	-	|	-	0	+	
$(x + 3)^2$		+	|	+	0	+	|	+	
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	||	$\searrow$		$\nearrow$	

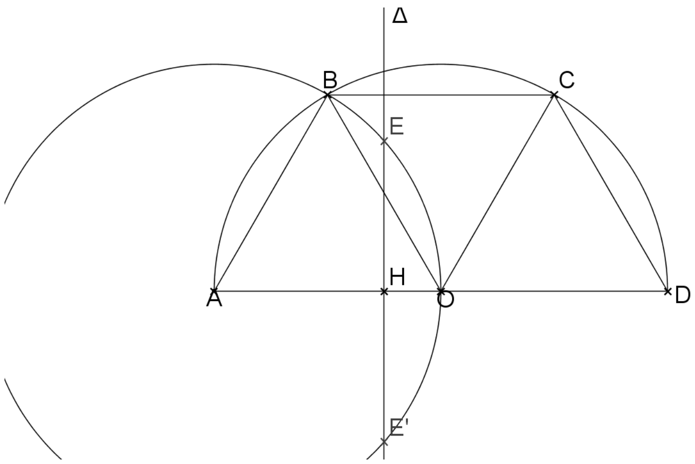
6. $3x - 9 + \dfrac{32}{x + 3} = \dfrac{(3x - 9)(x + 3) + 32}{x + 3} = \dfrac{3x^2 + 9x - 9x - 27 + 32}{x + 3} = \dfrac{3x^2 + 5}{x + 3} = f(x)$
7. $f(x) - (3x - 9) = 3x - 9 + \dfrac{32}{x + 3} - (3x - 9) = \dfrac{32}{x + 3}$ qui est du signe de $x + 3$ soit :

   $f(x) - (3x - 9)$ est strictement positif sur $] - 3; +\infty[$ et $f(x) - (3x - 9)$ est strictement négatif sur $] - \infty; -3[$.
8.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x) - (3x - 9)$	-	||	+
position de $\mathcal{C}_f$ et Δ	$\mathcal{C}_f$ au-dessous de Δ	||	$\mathcal{C}_f$ au-dessus de Δ

Exercice 3 :

1. $OA = OB = OC = OD = 1$ car ce sont des rayons du demi-cercle ; $ABCD$ étant un demi-hexagone régulier, $AB = BC = CD = 1$ donc les triangles OAB, OBC et OCD sont équilatéraux.
2. OCD étant équilatéral, la hauteur issue de C est aussi la médiane issue de C donc le milieu I de $[OD]$ est aussi le projeté orthogonal de C sur (OA).
   $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AI} = AO \times AI$ car $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires de même sens.
   $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 1,5 = 1,5$
   $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB} = AO \times AB \times cos(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = 1 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
   OAB et OBC étant équilatéraux, $OA = OB = AB = OC = BC$ donc le quadrilatère $OABC$ est un losange, ses côtés opposés sont parallèles : $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires de sens contraire donc
   $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CB} = -OA \times BC = -1$
   C étant un point du cercle de diamètre $[AD]$, ACD est un triangle rectangle en C donc $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux d'où $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = 0$.
3. Soit H le projeté orthogonal de E sur (AO), alors les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires et de même sens car leur produit scalaire est positif : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AO} = \dfrac{3}{4}$
   ainsi $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AO} = AH \times AO = AH \times 1 = \dfrac{3}{4} \Longleftrightarrow AH = \dfrac{3}{4}$
   Je place donc H sur $[AO]$ avec $AH = \dfrac{3}{4}$, comme H est le projeté orthogonal de E sur (AO), E est un point de la perpendiculaire à (AO) passant par H, notée Δ sur le dessin. On donne $AE = 1$ donc E est situé à l'intersection de Δ avec le cercle de centre A et de rayon 1. Il existe deux possibilités pour placer le point E, noté E et E' sur le dessin.



Exercice 4 :

* ABH étant un triangle rectangle en H, le projeté orthogonal de A sur (BH) est H donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH} = BH^2 = 4$
* K étant le projeté orthogonal de H sur (AB), $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BK} = BA \times BK$ car $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires de même sens.
donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH} = 3 \times BK = 4 \Longleftrightarrow BK = \dfrac{4}{3}$