Exercice 1 :

1. $\boxed{f(0) = -2}$, $\boxed{f(6) = 0}$ et $\boxed{f(4) = 6}$
2. $\boxed{f'(-2) = -4}$, $\boxed{f'(0) = \dfrac{3}{2}}$ et $\boxed{f'(4) = 0}$
3. Déterminer l'équation réduite des tangentes à la courbe
   (a) Par lecture graphique on obtient : $\boxed{y = \dfrac{3}{2}x - 2}$
   (b) Par lecture graphique on obtient : $\boxed{y = 6}$
4. On obtient, par lecture graphique, $\boxed{\alpha \approx -0,75}$
5. $f(x) \times f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ ou $f'(x) = 0$ donc $\boxed{S = \{-2; \alpha; 1; 4; 6\}}$

Exercice 2 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$

1. Calculons le taux de variation de f entre 2 et $2 + h$:
   Soit $h \neq 0$ et $h \neq 1$
   $$\tau_{[2;2+h]}(f) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h} = \frac{1-(1-h)}{1-h} \times \frac{1}{h} = \frac{h}{1-h} \times \frac{1}{h} = \boxed{\frac{1}{1-h}}$$
   Or $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{1-h} = 1 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en 2 et $\boxed{f'(2) = 1}$
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.
   L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est de la forme : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$
   Or $f'(2) = 1$ et $f(2) = 1$ donc l'équation est $y = 1(x-2) + 1 = x - 1$ donc $\boxed{y = x - 1}$

Exercice 3 :
On note P le polynôme tel que $P(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x - 500$

1. Partie I :
   (a) $P(10) = 2(10)^3 - 60(10)^2 + 450(10) - 500 = 2000 - 6000 + 4500 - 500 = 0$
   Comme $P(10) = 0$ alors 10 est une racine de P.
   (b) 10 est un racine de P donc d'après le théorème de décomposition des polynômes, il existe un polynôme Q de degré 2 tel que : $P(x) = (x-10)Q(x)$
   Il existe donc a, b et c tels que $P(x) = (x-10)(ax^2 + bx + c)$
   $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 10ax^2 - 10bx - 10c = ax^3 + (b - 10a)x^2 + (c - 10b)x - 10c$
   Par identification avec $P(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x - 500$ on obtient :
   $$\begin{cases} a = 2 \\ b - 10a = -60 \\ c - 10b = 450 \\ -10c = -500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -40 \\ c = 50 \end{cases} \text{ donc } P(x) = (x-10)(2x^2 - 40x + 50)$$
   Il reste donc à trouver les racines de $2x^2 - 40x + 50$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4(2)(50) = 1600 - 400 = 1200 = (20\sqrt{3})^2$ $\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :
   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{40 + 20\sqrt{3}}{4} = 10 + 5\sqrt{3}$$
   $$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{40 - 20\sqrt{3}}{4} = 10 - 5\sqrt{3}$$
   Donc $\boxed{P(x) = 2(x-10)(x - 10 - 5\sqrt{3})(x - 10 + 5\sqrt{3})}$
   (c) D'après la question précédente, les solutions de $P(x) = 0$ sont les élements de l'ensemble
   $\boxed{S = \{10 - 5\sqrt{3}; 10; 10 + 5\sqrt{3}\}}$
   (d) On a le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_2		10		x_1		$-\infty$
$x - 10$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$Q(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

donc les solutions de $P(x) < 0$ sont les élements de l'ensemble $\boxed{S =]-\infty; 10-5\sqrt{3}[\cup]10; 10+5\sqrt{3}[}$

2. Partie II :
   (a) $x \in]0; 15[$
   (b) $y = 30 - 2x$ et $2z + 2x = 30 \Leftrightarrow z = 15 - x$
   (c) Le volume de la boîte est $A(x) = xyz = x(15-x)(30-2x) = x(450 - 30x - 30x + 2x^2) = 2x^3 - 60x^2 + 540x$
   $A(x) = 500 \Leftrightarrow A(x) - 500 = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$
   donc les seules solutions possibles sont $x = 10$ cm et $x = 10 - 5\sqrt{3}$ cm.

Exercice 4 :
θ est un élément de $]-\pi; 0[$ avec $cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.
On utilise la relation trigonométrique : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$
donc $\sin^2(\theta) = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{2+6-4\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4}{4} - \dfrac{8-4\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4-8+4\sqrt{3}}{4} = -1+\sqrt{3} > 0$

Or θ est un élément de $]-\pi; 0[$ donc $\sin(\theta) < 0$ donc $\boxed{\sin(\theta) = -\sqrt{-1+\sqrt{3}}}$

Exercice 5 :
On sait que $tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

1. Pour tout $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}; 0\right[$, $\cos(x+\pi) \neq 0$ et $\cos(x) \neq 0$ et $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$
2. Pour tout $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}; 0\right[$, $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0$ et $\sin(x) \neq 0$ et $tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{-\cos(x)}{\sin(x)} = -\dfrac{1}{\tan(x)}$
3. $tan\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) = tan\left(\dfrac{\pi}{8} + \pi\right) = tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \boxed{\sqrt{2}-1}$
4. $tan\left(-\dfrac{3\pi}{8}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)}$ donc $tan\left(-\dfrac{3\pi}{8}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = -\dfrac{1(\sqrt{2}+1)}{2-1} = \boxed{-\sqrt{2}-1}$

Exercice 6 :

1. $r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$
   $\cos(\theta_A) = \dfrac{x_A}{r_A} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et comme $\theta_A \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $\theta_A = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Les coordonnées polaires de A par rapport à l'axe polaire $(O, \overrightarrow{i})$ sont $\boxed{A\left(2\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{4}\right)}$.
2. $x_B = r_B \times \cos(\theta_B) = 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2$
   $y_B = r_B \times \sin(\theta_B) = 2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$
   donc les coordonnées cartésiennes de B dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont $\boxed{B(-2; 2)}$.
3. $r_B = 2\sqrt{2}$
   $\phi_B = (\widehat{\overrightarrow{j}; \overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{j}; \overrightarrow{i}}) + (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OB}}) - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
   donc les coordonnées polaires de B par rapport à l'axe polaire $(O, \overrightarrow{j})$ sont $\boxed{B\left(2\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{4}\right)}$.
4. $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB}}) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
   donc $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB}}) - (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}}) = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \boxed{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
5. D'après la question précédente, le triangle OAB est rectangle en O, donc on peut utiliser le théorème de Pythagore :
   $AB = \sqrt{r_A^2 + r_B^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2(\sqrt{2})^2 = 4$ donc $\boxed{AB = 4 \text{ ul}}$ (ul : unité de longueur)