Exercice 1 :

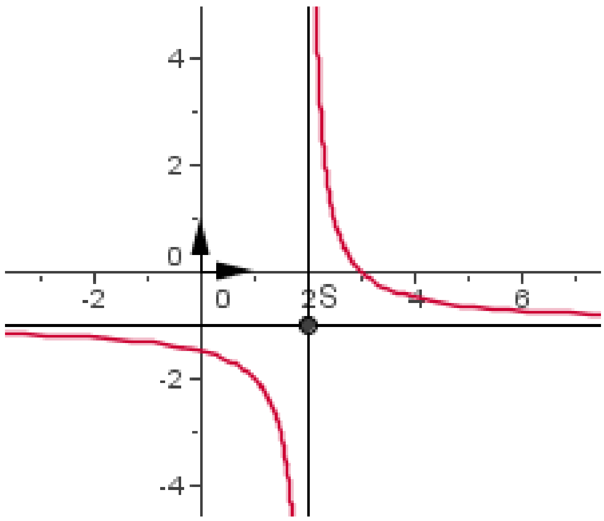
1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$
$f(x) = -3x^2 + 6x + 2 = -3\left(x^2 - 2x - \frac{2}{3}\right) = -3\left((x-1)^2 - 1 - \frac{2}{3}\right) = -3\left((x-1)^2 - \frac{5}{3}\right) = -3(x-1)^2 + 5$
donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = -3(x-1)^2 + 5}$

(b) On note $h : x \mapsto (x-1)^2 - \frac{5}{3}$
La courbe représentative de h est l'image de la courbe de la fonction carré par la translation de vecteur $1\vec{i} - \frac{5}{3}\vec{j}$
Donc $\mathcal{C}_h$ est une parabole de sommet $S\left(1; \frac{5}{3}\right)$ tournée vers le haut et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$.
Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -3h(x)$ donc la courbe de la fonction f est une parabole de sommet $S(1;5)$ tournée vers le bas et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
$g(x) = \frac{3-x}{x-2} = \frac{-x+2+1}{x-2} = \frac{-(x-2)+1}{x-2} = \frac{-(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} = -1 + \frac{1}{x-2}$
donc par identification avec $a + \frac{b}{x-2}$ on obtient : $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

(b) On note f la fonction inverse : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$
On a alors $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $g(x) = f(x-2) - 1$ donc la courbe représentative de g est l'image de la courbe de la fonction inverse par translation de vecteur $2\vec{i} - 1\vec{j}$. Donc $\mathcal{C}_g$ est une hyperbole de centre de symétrie $S(2;-1)$

(c) Allure de la courbe $\mathcal{C}_f$: dans un repère orthonormé.



Exercice 2 :

(a) • Domaine de définition de g :
g est une fonction polynôme donc $D_g = \mathbb{R}$.
• Domaine de définition de f :
$f(x)$ existe si et seulement si $x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 9$ donc $D_f = [9; +\infty[$
• Domaine de définition de $f \circ g$:
$(f \circ g)(x)$ existe si et seulement si $x \in D_g$ et $g(x) \in D_f$
On a donc $x \in \mathbb{R}$ et $(4-x)^2 \geq 9$
Or $(4-x)^2 \geq 9 \Leftrightarrow (4-x)^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (4-x+3)(4-x-3) \geq 0$
Il faut donc résoudre $(7-x)(1-x) \geq 0$ à l'aide du tableau des signes :

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$7-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$1-x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(7-x)(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $D_{f \circ g} =]-\infty; 1] \cup [7; +\infty[$

(b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 9} = \sqrt{(4-x)^2 - 9}$

1. Soit la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$
   (a) $h(x)$ existe si et seulement si $2-\sqrt{x} \neq 0$ et $x \geq 0$
   Donc $x \geq 0$ et $\sqrt{x} \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 4$ On a donc $D_h = [0;4[\cup]4;+\infty[$
   (b) On utilise la décomposition suivante :
   $$x \xmapsto{t} \sqrt{x} \xmapsto{n} 2-\sqrt{x} \xmapsto{m} \frac{1}{2-\sqrt{x}}$$
   avec :
   $t : x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$, $n : x \longmapsto 2-x$ définie sur $\mathbb{R}$, $m : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 3 :
Soit ABC un triangle.

1. On note G barycentre de $(A,1)(B,1)(C,2)$.
   G existe car $1+1+2=4\neq 0$
   On note C' le milieu de $[AB]$ alors d'après le théorème d'associativité des barycentres, on a :
   G barycentre de $(C',2)(C,2)$ donc G est le milieu de $[CC']$
2. D'après le cours on a, pour tout point M du plan :
   $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$
   donc pour tout point M de cet ensemble, $4\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux ou $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
   (Δ) L'ensemble des points M est la droite passant par G et perpendiculaire à (BC)
3. D'après le cours on a, pour tout point M du plan :
   $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$
   De plus $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC'}-2\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CC'}=2\overrightarrow{CC'}$
   Donc l'ensemble des points M vérifient : $\parallel 4\overrightarrow{MG} \parallel = \parallel 2\overrightarrow{CC'} \parallel \Leftrightarrow MG = \dfrac{1}{2}CC'$
   Donc (Γ)l'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{1}{2}CC'$

Exercice 4 :
Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, G le barycentre de $(A,2)(B,1)$ et H le barycentre de $(C,2)(D,1)$.

1. G le barycentre de $(A,2)(B,1)$ avec $2+1=3\neq 0$ donc $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
   H le barycentre de $(C,2)(D,1)$ avec $2+1=3\neq 0$ donc $\overrightarrow{CH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$
   On a donc
   $\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$ car O milieu de $[AC]$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
   donc $\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{0}$ donc O est l'isobarycentre de G et H.
2. O est l'isobarycentre de G et H donc O est le milieu de $[GH]$
   De plus O est le milieu de $[AC]$
   Or un quadrilatère qui a des diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme
   donc $GAHC$ est un parallélogramme.

Exercice 5 :
On note D le barycentre de $(A,-1)(B,2)(C,3)$ et E le barycentre de $(B,-4)(A,2)$.

1. E le barycentre de $(B,-4)(A,2)$ et par homogénéité on a
   E le barycentre de $(B,2)(A,-1)$
   or D le barycentre de $(A,-1)(B,2)(C,3)$
   donc d'après le théorème d'associativité des barycentres avec E barycentre partiel de $(B,2)(A,-1)$ on obtient :
   D le barycentre de $(E,-1+2)(C,3)$ et donc de $(E1)(C,3)$
   donc D, E et C sont alignés.
2. On a $\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HA}=0$ et H barycentre de $(A,1)(B,1)$
   On a $2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{CB}$ donc $2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{CI}-I\overrightarrow{B}=\overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ et I est le barycentre de $(B,1)(C,1)$
   Par homogénéité on obtient :
   • H barycentre de $(A,-1)(B,-1)$
   et
   • I est le barycentre de $(B,3)(C,3)$
   or D est le barycentre de $(A,-1)(B,-1)(B,3)(C,3)$ donc par le théorème d'associativité des barycentres, D est le barycentre de $(H,-2)(I,6)$ donc D, H et I sont alignés.