Exercice 01 :

1. $F(L) = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}} = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}\right) \times \dfrac{1}{L}$

   $F : L \mapsto \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit d'une constante $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}\right)$ par la fonction inverse $\left(L \mapsto \dfrac{1}{L}\right)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   On a donc $F'(L) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}} \times \left(-\dfrac{1}{L^2}\right)$, donc

   $$\boxed{F'(L) = -\frac{1}{2L^2}\sqrt{\frac{T}{\rho}}}$$

2. $F(T) = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}} = \left(\dfrac{1}{2L\sqrt{\rho}}\right) \times \sqrt{T}$

   $F : T \mapsto \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit d'une constante $\dfrac{1}{2L\sqrt{\rho}}$ par la fonction racine carrée $\left(T \mapsto \sqrt{T}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   On a donc $F'(T) = \dfrac{1}{2L\sqrt{\rho}} \times \left(\dfrac{1}{2\sqrt{T}}\right)$, donc

   $$\boxed{F'(T) = \frac{1}{4L\sqrt{T\rho}}}$$

3. $F(\rho) = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}} = \left(\dfrac{\sqrt{T}}{2L}\right) \times \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}$

   Comme nous ne connaissons pas la formule de dérivation de la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, il va falloir la trouver :
   On note $h \in \mathbb{R}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$:
   $\tau_{[x_0+h,x_0]}(f_1) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}} - \dfrac{1}{\sqrt{x_0}}\right) = \dfrac{\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0+h}}{h\sqrt{x_0}\sqrt{x_0+h}}$
   donc
   $\tau_{[x_0+h,x_0]}(f_1) = \dfrac{x_0 - (x_0+h)}{h\sqrt{x_0}\sqrt{x_0+h}(\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0+h})} = \dfrac{-1}{\sqrt{x_0}\sqrt{x_0+h}(\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0+h})}$
   $\lim\limits_{h\to 0} \tau_{[x_0+h,x_0]}(f) = \dfrac{-1}{2x_0\sqrt{x_0}} \in \mathbb{R}$ si $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ donc f_1 est dérivable sur R^{+*} et $f_1'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$

   $F : \rho \mapsto \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit d'une constante $\dfrac{\sqrt{T}}{2L}$ par la fonction $\left(\rho \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   On a donc $F'(\rho) = \dfrac{\sqrt{T}}{2L} \times \left(\dfrac{-1}{2\rho\sqrt{\rho}}\right)$, donc

   $$\boxed{F'(\rho) = \frac{-\sqrt{T}}{4L\rho\sqrt{\rho}}}$$

1. $F' : L \mapsto -\dfrac{1}{L^2}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ est strictement négative sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc la fonction F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Donc lorsque L augmente alors $F(L)$ diminue et si L diminue alors $F(L)$ augmente.
   Si la longueur de la corde est raccourcie alors la fréquence augmente et donc le ton est plus aigu.

2. $F' : T \mapsto -\dfrac{1}{L^2}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc lorsque T augmente alors $F(L)$ augmente et si T diminue alors $F(L)$ diminue.
Si la tension est accrue en tournant une cheville alors la fréquence augmente et donc le ton est plus aigu.

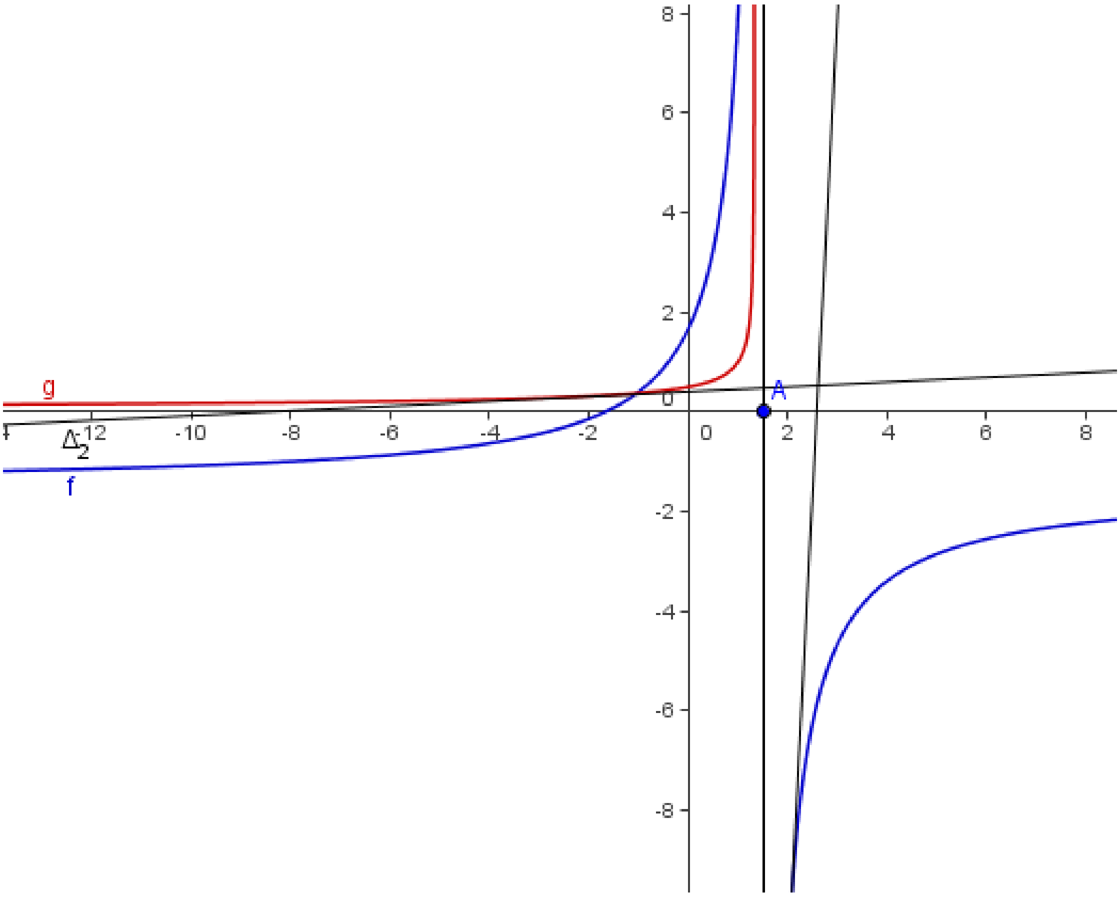
3. $F' : \rho \mapsto -\dfrac{1}{L^2}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ est strictement négative sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc la fonction F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Donc lorsque ρ augmente alors $F(L)$ diminue et si ρ diminue alors $F(L)$ augmente.
Si la densité linéaire est accrue alors la fréquence diminue et donc le ton est plus aigu et si la densité linéaire est diminuée alors la fréquence augmente et donc le ton est plus grave.
4. Pour aller plus loin dans les rapports entre musique et maths :

   @ `http://newton.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/mai05/Math-musique-II.pdf`

   @ `http://accromath.uqam.ca/contents/pdf/musique.pdf`

Exercice 02 :
On note $f : x \mapsto \dfrac{3x+5}{3-2x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-3x}}$
Pour ces deux fonctions,

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ et $D_g = \left]-\infty, \dfrac{4}{3}\right[$
2. **Fonction dérivée de** f :
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ car c'est une fonction rationnelle.
On pose u la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x+5$.
On pose v la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 3-2x$.
On a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = -2$
Or $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{3(3-2x)-(3x+5)(-2)}{(3-2x)^2} = \dfrac{19}{(3-2x)^2}$
$$\boxed{f'(x) = \dfrac{19}{(3-2x)^2}}$$
Fonction dérivée de g :
g est définie et dérivable sur $\left]-\infty, \dfrac{4}{3}\right[$ car c'est la composée de la fonction f_1 du premier exercice avec la fonction affine $x \mapsto 4-3x$.
On a $g = f_1(4-3x)$ donc $g'(x) = -3f_1'(4-3x) = -3 \times \dfrac{-1}{2(4-3x)\sqrt{4-3x}} = \dfrac{3}{2(4-3x)\sqrt{4-3x}}$
$$\boxed{g'(x) = \dfrac{3}{2(4-3x)\sqrt{4-3x}}}$$
3. Variations de f :
f' est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty; \dfrac{3}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$.
Variations de g :
Comme $\dfrac{3}{2\sqrt{4-3x}}$ est strictement positif sur $\left]-\infty, \dfrac{4}{3}\right[$ alors $g'(x)$ est du signe de $4-3x$. Or sur $\left]-\infty, \dfrac{4}{3}\right[$ $4-3x > 0$ donc g' est strictement positive sur $\left]-\infty, \dfrac{4}{3}\right[$. Donc g est strictement croissante sur $\left]-\infty, \dfrac{4}{3}\right[$.
4. L'équation réduite de (Δ_1) est de la forme : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$
$f'(2) = 19$ et $f(2) = -11$ donc $y = 19(x-2) - 11 = 19x - 49$ donc $\boxed{y = 19x - 49}$.
5. L'équation réduite de (Δ_2) est de la forme : $y = g'(-2)(x+2) + g(-2)$
$g'(-2) = \dfrac{3\sqrt{10}}{200}$ et $g(-2) = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$
On a donc $y = \dfrac{3\sqrt{10}}{200}(x+2) + \dfrac{\sqrt{10}}{10} = \dfrac{3\sqrt{10}}{200}x + \dfrac{26\sqrt{10}}{200}$
donc $\boxed{y = \dfrac{3\sqrt{10}}{200}x + \dfrac{26\sqrt{10}}{200}}$
6. Représentation graphique :



g
f
Δ_2
A
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8