Exercice 01 :

1. On note $h \in \mathbb{R}$ tel que $h \neq 0$ et $h \neq 2-a$
$\tau_{[a+h,a]}(f) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
$= \dfrac{\dfrac{(a+h)^2+1}{(a+h)-2} - \dfrac{a^2+1}{a-2}}{h} = \dfrac{1}{h}\left[\dfrac{a^2+2ah+h^2+1}{a+h-2} - \dfrac{a^2+1}{a-2}\right] = \dfrac{1}{h}\left[\dfrac{(a^2+2ah+h^2+1)(a-2)-(a^2+1)(a+h-2)}{(a+h-2)(a-2)}\right]$
$= \dfrac{1}{h}\left[\dfrac{a^3+2a^2h+ah^2+a-2a^2-4ah-2h^2-2-a^3-a^2h+2a^2-a-h+2}{(a+h-2)(a-2)}\right]$
$= \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{a^2h+ah^2-4ah-2h^2-h}{(a+h-2)(a-2)}\right)$
$= \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{h(a^2+ah-4a-2h-1)}{(a+h-2)(a-2)}\right)$
$= \dfrac{(a^2+ah-4a-2h-1)}{(a+h-2)(a-2)}$
Or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(a^2+ah-4a-2h-1)}{(a+h-2)(a-2)} = \dfrac{a^2-4a-1}{(a-2)^2} \in \mathbb{R}$
donc f est dérivable en a et $\boxed{f'(a) = \dfrac{a^2-4a-1}{(a-2)^2}}$

2. On note $h \in \mathbb{R}$ tel que $h \neq 0$ et $h > -a-2$
$\tau_{[a+h,a]}(g) = \dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$
$= \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a+h+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{a+2}}}{h} = \dfrac{1}{h}\left[\dfrac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a+h+2}}{\sqrt{a+h+2}\times\sqrt{a+2}}\right] = \dfrac{1}{h}\left[\dfrac{(a+2)-(a+2+h)}{(\sqrt{a+h+2}\times\sqrt{a+2})(\sqrt{a+2}+\sqrt{a+h+2})}\right]$
$= \dfrac{1}{h}\left[\dfrac{-h}{(\sqrt{a+h+2}\times\sqrt{a+2})(\sqrt{a+2}+\sqrt{a+h+2})}\right] = \dfrac{-1}{(\sqrt{a+h+2}\times\sqrt{a+2})(\sqrt{a+2}+\sqrt{a+h+2})}$
Or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{(\sqrt{a+h+2}\times\sqrt{a+2})(\sqrt{a+2}+\sqrt{a+h+2})} = \dfrac{-1}{2(a+2)\sqrt{a+2}} \in \mathbb{R}$
donc g est dérivable en a et $\boxed{g'(a) = \dfrac{-1}{2(a+2)\sqrt{a+2}} = \dfrac{-\sqrt{a+2}}{2(a+2)^2}}$

Exercice 02 :
Le nombre de bactéries après t heures dans une expérience contrôlée est donné par $n = f(t)$.

1. $f'(5) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(5+t)-f(5)}{t}$
$f'(5)$ représente le taux de variation de la population des bactéries par rapport à t quand $t = 5$ heures. $f'(5)$ représente aussi la vitesse à laquelle le nombre de bactéries change après 5 heures.
Elle s'exprime en nombre bactéries par heure.
2. Si la quantité de nourriture et d'espace n'est pas limitée alors les bactéries continuent à proliférer par **mitose** (Division cellulaire : une bactérie se divise pour donner deux bactéries ...) On a donc $\boxed{f'(10) > f'(5)}$.
3. Si par contre, seule la quantité de nourriture est limitée alors des bactéries meurent et donc ne se divisent plus alors on ne peut plus comparer $f'(10)$ et $f'(5)$.

Exercice 03 :

$E'(1910)$ représente le taux de variation de l'espérance de vie par rapport à t quand $t = 1910$ ans.
$E'(1910)$ représente la vitesse à laquelle l'espérance de vie évolue en 1910.

$E'(1950)$ représente le taux de variation de l'espérance de vie par rapport à t quand $t = 1950$ ans.
$E'(1910)$ représente la vitesse à laquelle l'espérance de vie évolue en 1950.

L'unité de E' est : années d'espérance de vie par an.

$E'(1910) = \lim\limits_{t\to 1910} \dfrac{E(t)-E(1910)}{t-1910}$

t	$E(t)$	$\dfrac{E(t)-E(1910)}{t-1910}$	t	$E(t)$	$\dfrac{E(t)-E(1910)}{t-1910}$
1900	48.3	0.28	1960	66.6	0.31
1920	55.2	0.41	1970	67.1	$0.26\underline{6}$
1930	57.4	0.315	1980	70	0.27
1940	62.5	0.38	1990	71.8	0.25875
1950	65.6	0.3625	2000	74.1	$0.25\underline{5}$

donc $\boxed{0.28 < E'(1910) < 0.41}$

On peut estimer que $E'(1910) \approx \dfrac{0.28+0.41}{2}$ donc $E'(1910) \approx 0.345$ année/an.
Donc en 1910 l'espérance de vie d'un enfant mâle né aux Etats-Unis augmentait de 126 jours par an.

$E'(1950) = \lim\limits_{t \to 1950} \dfrac{E(t)-E(1950)}{t-1950}$

t	$E(t)$	$\dfrac{E(t)-E(1950)}{t-1950}$	t	$E(t)$	$\dfrac{E(t)-E(1950)}{t-1950}$
1900	48.3	0.346	1960	66.6	0.1
1910	51.1	0.3625	1970	67.1	0.075
1920	55.2	$0.346\underline{6}$	1980	70	$0.146\underline{6}$
1930	57.4	0.41	1990	71.8	0.155
1940	62.5	0.31	2000	74.1	0.17

donc $\boxed{0.1 < E'(1950) < 0.31}$

On peut estimer que $E'(1950) \approx \dfrac{0.1+0.31}{2}$ donc $E'(1950) \approx 0.205$ année/an.
Donc en 1950 l'espérance de vie d'un enfant mâle né aux Etats-Unis augmentait de 75 jours par an.

Exercice 04 :

1. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, $(h-2)^3 = (h-2)^2(h-2) = (h^2-4h+4)(h-2) = h^3-4h^2+4h-2h^2+8h-8 = h^3-6h^2+12h-8$
2. On note $g : x \mapsto 4x^2 - x^3$

   (a) L'équation de la tangente est de la forme : $y = g'(0)x + g(0)$
   $g(0) = 0$
   $\tau_{[h,0]}(g) = \dfrac{g(h)-g(0)}{h} = \dfrac{4h^2-h^3}{h} = 4h - h^2$
   or $\lim\limits_{h\to 0} 4h - h^2 = 0 \in \mathbb{R}$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
   donc l'équation de la tangente est : $y = 0x + 0$ donc $\boxed{y = 0}$

   (b) L'équation de la tangente est de la forme : $y = g'(-2)(x+2) + g(-2)$
   $g(-2) = 24$
   $\tau_{[h-2,-2]}(g) = \dfrac{g(h-2)-g(-2)}{h} = \dfrac{4(h-2)^2-(h-2)^3-24}{h} = \dfrac{4(h^2-4h+4)-h^3+6h^2-12h+8-24}{h}$
   $= \dfrac{4h^2-16h+16-h^3+6h^2-12h+8-24}{h} = \dfrac{-h^3+10h^2-28h}{h} = -h^2+10h-28$
   or $\lim\limits_{h\to 0} -h^2+10h-28 = -28 \in \mathbb{R}$ donc g est dérivable en -2 et $g'(-2) = -28$.
   donc l'équation de la tangente est : $y = -28(x+2)+24 = -28x-32$ donc $\boxed{y = -28x - 32}$