Exercice 01 :

Un bateau descend une rivière sur une distance de $26,8$ km puis remonte sur $22,3$ km.
Le voyage dure 8 heures et la vitesse du courant est de 2.5 km par heure.

1. Si le bateau descend la rivière alors sa vitesse est : $v_d = v + 2.5$ donc $t_d = \dfrac{d_d}{v_d} = \dfrac{26,8}{v+2.5}$
2. Si le bateau remonte la rivière alors sa vitesse est : $v_r = v - 2.5$ donc $t_r = \dfrac{d_r}{v_r} = \dfrac{22,3}{v-2.5}$
3. Comme le voyage aller-retour dure 8 heures alors $t_d + t_r = 8$ donc $\dfrac{26,8}{v+2.5} + \dfrac{22,3}{v-2.5} = 8$

   Il faut donc résoudre : $\dfrac{26,8}{v+2.5} + \dfrac{22,3}{v-2.5} = 8$

   $\dfrac{26,8}{v+2.5} + \dfrac{22,3}{v-2.5} = 8$

   $\Leftrightarrow \dfrac{26,8(v-2.5) + 22,3(v+2.5)}{(v+2.5)(v-2.5)} = 8$

   $\Leftrightarrow \dfrac{26.8v - 67 + 22.5v + 55.75}{(v+2.5)(v-2.5)} - \dfrac{8(v+2.5)(v-2.5)}{(v+2.5)(v-2.5)} = 0$

   $\Leftrightarrow \dfrac{49.1v - 11.25 - 8(v^2 - 6.25)}{(v+2.5)(v-2.5)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-8v^2 + 49.1v + 38.75}{(v+2.5)(v-2.5)} = 0$

   $\Leftrightarrow -8v^2 + 49.1v + 38.75 = 0$

   On obtient donc une équation du second degré : $-8v^2 + 49.1v + 38.75 = 0$

   $\Delta = b^2 - 4ac = (49.1)^2 - 4(38.75)(-8) = 3650.81$

   $\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

   $v_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-49.1 + \sqrt{3650.81}}{-16} < 0$ cette solution n'est pas possible car la vitesse est positive.

   $v_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-49.1 - \sqrt{3650.81}}{-16} \approx 6.85$ km/h.

   La vitesse du bateau est d'environ 6.85 km/h.

Exercice 02 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

1. $10.10^{14} + x^2 = 8.10^7 x \Leftrightarrow x^2 - 8.10^7 x + 10.10^{14} = 0$

   $\Delta = b^2 - 4ac = (-8.10^7)^2 - 4(1)(10.10^{14}) = 64.10^{14} - 40.10^{14} = 24.10^{14} = (2\sqrt{6}.10^7)^2$

   $\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

   $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8.10^7 + 2\sqrt{6}.10^7}{2} = (4 + \sqrt{6}).10^7$

   $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8.10^7 - 2\sqrt{6}.10^7}{2} = (4 - \sqrt{6}).10^7$

   donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \left\{(4-\sqrt{6}).10^7 ; (4+\sqrt{6}).10^7\right\}}$
2. $x + 4\sqrt{x} + 49 = 0$

   On pose $y = \sqrt{x}$ avec $x > 0$ alors on obtient :

   $y^2 + 4x + 49 = 0$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(49) = 16 - 196 = -180$

   $\Delta < 0$ donc il n'y a pas de racine réelle à cette équation donc dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \emptyset}$
3. $\dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{x-1}{2x+3} \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x-2} - \dfrac{x-1}{2x+3} \Leftrightarrow \dfrac{(x+3)(2x+3)}{(x-2)(2x+3)} - \dfrac{(x-1)(x-2)}{(2x+3)(x-2)} = 0$

   $\Leftrightarrow \dfrac{2x^2 + 9x + 9}{(x-2)(2x+3)} - \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(2x+3)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2 + 9x + 9 - x^2 + 3x - 2}{(x-2)(2x+3)} = 0$

   $\Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 12x + 7}{(x-2)(2x+3)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 7 = 0$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4(1)(7) = 144 - 28 = 116 = (2\sqrt{29})^2$

   $\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

   $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12 + 2\sqrt{29}}{2} = -6 + \sqrt{29}$

   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12 - 2\sqrt{29}}{2} = -6 - \sqrt{29}$

   donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \left\{-6 - \sqrt{29} ; -6 + \sqrt{29}\right\}}$