Exercice 01 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $6x^2 + 11x - 7 = 0$ est une équation du second degré avec $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (11)^2 - 4(6)(-7) = 289 = 17^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-11+17}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$
   $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-11-17}{12} = \dfrac{-28}{12} = -\dfrac{7}{3}$
   Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \left\{-\dfrac{7}{3}; \dfrac{1}{2}\right\}}$
2. On pose $t = y^2$ et on obtient l'équation $35t^2 - 1 = -3t \Leftrightarrow 35t^2 + 3t - 1 = 0$
   $35t^2 + 3t - 1 = 0$est une équation du second degré avec $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(35)(-1) = 149 = (\sqrt{149})^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :
   $t_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+\sqrt{149}}{70}$
   $t_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-\sqrt{149}}{70}$
   Il reste à résoudre les deux équations : $y_1^2 = t_1$ et $y_2^2 = t_2$

   ➠ $y_1^2 = t_1 \Leftrightarrow y_1^2 = \dfrac{-3+\sqrt{149}}{70} > 0$
   donc $y_1 = \sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{149}}{70}}$ ou $y_1 = -\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{149}}{70}}$.

   ➠ $y_2^2 = t_2$ n'est pas résolvable dans $\mathbb{R}$ car $t_2 < 0$

   Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \left\{-\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{149}}{70}}; \sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{149}}{70}}\right\}}$
3. $2z^2 - 7.10^5 z = 15.10^{10} \Leftrightarrow 2z^2 - 7.10^5 z - 15.10^{10}$
   est une équation du second degré avec $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-7.10^5)^2 - 4(2)(-15.10^{10}) = 49.10^{10} + 120.10^{10} = 169.10^{10} = (13.10^5)^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :
   $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7.10^5 + 13.10^5}{4} = \dfrac{20.10^5}{4} = 5.10^5$
   $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7.10^5 - 13.10^5}{4} = \dfrac{-6.10^5}{4} = -\dfrac{3}{2}.10^5$
   Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \left\{-\dfrac{3}{2}.10^5; 5.10^5\right\}}$
4. $m - 8\sqrt{m} + 15 = 0$
   On pose $t = \sqrt{m}$ donc on obtient $t^2 - 8t + 15 = 0$.
   C'est une équation du second degré avec $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(15) = 4 = 2^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :
   $t_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8+2}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$
   $t_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8-2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$
   Il reste à résoudre les deux équations : $\sqrt{m_1} = t_1$ et $\sqrt{m_2} = t_2$ avec $m_1 \geq 0$ et $m_2 \geq 0$

   ➠ $\sqrt{m_1} = t_1 \Leftrightarrow m_1 = t_1^2 = 25$
   ➠ $\sqrt{m_2} = t_2 \Leftrightarrow m_2 = t_2^2 = 9$

   Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \{9; 25\}}$

Exercice 02 : On souhaite résoudre l'équation suivante $x^2 - 3(\sqrt{3} - \sqrt{7})x - 9\sqrt{21} = 0$

1. $\Delta = b^2 - 4ac = [-3(\sqrt{3} - \sqrt{7})]^2 - 4(1)(-9\sqrt{21}) = 9(3 - 2\sqrt{21} + 7) + 36\sqrt{21}$
   donc
   $\Delta = 27 - 18\sqrt{21} + 63 + 36\sqrt{21} = 90 + 18\sqrt{21}$
   De plus $(3\sqrt{3} + 3\sqrt{7})^2 = (3\sqrt{3})^2 + 2(3\sqrt{3})(3\sqrt{7}) + (3\sqrt{7})^2 = 27 + 18\sqrt{21} + 63 = 90 + 18\sqrt{21}$
   donc $\Delta = (3\sqrt{3} + 3\sqrt{7})^2$
2. $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3(\sqrt{3} - \sqrt{7}) + (3\sqrt{3} + 3\sqrt{7})}{2} = 3\sqrt{3}$
   $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3(\sqrt{3} - \sqrt{7}) - (3\sqrt{3} + 3\sqrt{7})}{2} = -3\sqrt{7}$
   Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \left\{-3\sqrt{7}; 3\sqrt{3}\right\}}$

Exercice 03 : x et y sont différents de 0 car $xy \neq 0$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 104 \\ xy = 8\sqrt{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{8\sqrt{30}}{y}\right)^2 + y^2 = 104 \\ x = \dfrac{8\sqrt{30}}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + \dfrac{1920}{y^2} - 104 = 0 \\ x = \dfrac{8\sqrt{30}}{y} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 104 \\ xy = 8\sqrt{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 104y^2 + 1920 = 0 \\ x = \dfrac{8\sqrt{30}}{y} \end{cases}$$

Résolvons l'équation $y^4 - 104y^2 + 1920 = 0$:
On pose $t = y^2$ et on obtient : $t^2 - 104t + 1920 = 0$ qui est une équation du second degré avec $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-104)^2 - 4(1)(1920) = 3136 = 56^2$
$\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :
$t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{104 + 56}{2} = 80$
$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{104 - 56}{2} = 24$
Il faut résoudre les deux équations : $y_1^2 = t_1$ et $y_2^2 = t_2$ avec $t_1 \geq 0$ et $t_2 \geq 0$

➠ $y_1^2 = 80 \Leftrightarrow y_1 = 4\sqrt{5}$ ou $y_1 = -4\sqrt{5}$

➠ $y_2^2 = 24 \Leftrightarrow y_2 = 2\sqrt{6}$ ou $y_2 = -2\sqrt{6}$

Il reste à trouver les valeurs de x possibles :

➠ Si $y_1 = 4\sqrt{5}$ alors $x_1 = \dfrac{8\sqrt{30}}{4\sqrt{5}} = 2\sqrt{6}$

➠ Si $y_1 = -4\sqrt{5}$ alors $x_1 = \dfrac{8\sqrt{30}}{-4\sqrt{5}} = -2\sqrt{6}$

➠ Si $y_1 = 2\sqrt{6}$ alors $x_2 = \dfrac{8\sqrt{30}}{2\sqrt{6}} = 4\sqrt{5}$

➠ Si $y_1 = -2\sqrt{6}$ alors $x_2 = \dfrac{8\sqrt{30}}{-2\sqrt{6}} = -4\sqrt{5}$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \left\{(2\sqrt{6}; 4\sqrt{5}); (-2\sqrt{6}; -4\sqrt{5}); (4\sqrt{5}; 2\sqrt{6}); (-4\sqrt{5}; -2\sqrt{6})\right\}}$