Exercice 01 :

1. Ensemble de définition de f :
   $f(x)$ existe si et seulement si $3+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$
   donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}}$

   Ensemble de définition de g :
   g est une fonction polynôme donc $\boxed{D_g = \mathbb{R}}$

   Ensemble de définition de h :
   $h(x)$ existe si et seulement si $3-x \geq 0 \Leftrightarrow 3 \geq x$ donc $\boxed{D_h =]-\infty;3]}$

2. Ensemble de définition de $f \times g$:
   $D_{f\times g} = D_f \cap D_g = (]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
   donc $\boxed{D_{f\times g} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}}$

   Ensemble de définition de $\dfrac{h}{g}$:
   $D_{\frac{h}{g}} = D_h \cap D_g \setminus \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } g(x) \neq 0\}$
   $g(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$
   donc $D_{\frac{f}{g}} =]-\infty;3]\cap\mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$
   donc $\boxed{D_{\frac{h}{g}} =]-\infty;-3[\cup]-3;3[}$

   Ensemble de définition de $h \circ f$:
   $(h \circ f)(x)$ existe si et seulement si $x \in D_f$ et $f(x) \in D_h$
   donc $x \neq -3$ et $f(x) \leq 3$
   or $\dfrac{1}{x+3} \leq 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3+x} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-3(x+3)}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-8-3x}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{8+3x}{3+x} \geq 0$
   Dressons le tableau de signe de $A(x) = \dfrac{8+3x}{3+x}$:

x	$-\infty$		-3		$-8/3$	$+\infty$
$8+3x$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
$3+x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$A(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

   donc $\boxed{D_{h\circ f} =]-\infty;-3[\cup[-8/3;+\infty[}$

   Ensemble de définition de $h \circ g$:
   $(h \circ g)(x)$ existe si et seulement si $x \in D_g$ et $g(x) \in D_h$
   donc $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) \leq 3$
   or $9 - x^2 \leq 3 \Leftrightarrow 6 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{6}-x)(\sqrt{6}+x) \leq 0$
   Dressons le tableau de signe de $B(x) = (\sqrt{6}-x)(\sqrt{6}+x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{6}$	$+\infty$
$\sqrt{6}-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$
$\sqrt{6}+x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

   donc $\boxed{D_{h\circ g} =]-\infty;-\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6};+\infty[}$

3. L'image de x par la fonction $f \times g$:
   $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \dfrac{1}{3+x} \times (3-x)(3+x) = 3 - x$

donc $\boxed{(f \times g)(x) = 3 - x}$

<u>L'image de x par la fonction</u> $\dfrac{h}{g}$:

$(\dfrac{h}{g})(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{3-x}}{9-x^2}$

<u>L'image de x par la fonction</u> $h \circ f$:

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \sqrt{3 - \dfrac{1}{3+x}} = \sqrt{\dfrac{8+3x}{3+x}}$ donc $\boxed{(h \circ f)(x) = \sqrt{\dfrac{8+3x}{3+x}}}$

<u>L'image de x par la fonction</u> $h \circ g$:

$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \sqrt{3-(9-x^2)} = \sqrt{x^2-6}$ donc $\boxed{(h \circ g)(x) = \sqrt{x^2-6}}$

4. <u>Première méthode</u> :
   •On note a et b deux réels de l'intervalle $]-\infty; -3[$ tels que $\boxed{a < b}$
   $f(a) - f(b) = \dfrac{1}{3+a} - \dfrac{1}{3+b} = \dfrac{3+b-3-a}{(3+a)(3+b)} = \dfrac{b-a}{(3+a)(3+b)}$
   Or $a < b$ donc $b - a > 0$
   de plus $a < -3$ donc $a + 3 < 0$ et $b < -3$ donc $b + 3 < 0$
   donc $f(a) - f(b) > 0$ donc $\boxed{f(a) > f(b)}$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty; -3[$.
   •On note a et b deux réels de l'intervalle $]-3; +\infty[$ tels que $\boxed{a < b}$
   $f(a) - f(b) = \dfrac{b-a}{(3+a)(3+b)}$
   Or $a < b$ donc $b - a > 0$
   de plus $a > -3$ donc $a + 3 > 0$ et $b > -3$ donc $b + 3 > 0$
   donc $f(a) - f(b) > 0$ donc $\boxed{f(a) > f(b)}$ et f est strictement décroissante sur $]-3; +\infty[$.
   <u>Deuxième méthode</u> :
   On note $m : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
   La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$
   Or $f(x) = m(x+3)$ donc d'après le cours les variations de f sont les mêmes que celles de m mais sur les intervalles $]-\infty; -3[$ et $]-3; +\infty[$
   donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -3[$ et strictement décroissante sur $]-3; +\infty[$
   <u>Troisième méthode</u> :
   On note $m : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $t : x \mapsto 3 + x$ alors $f = m \circ t$
   • La fonction t est strictement croissante sur $I =]-\infty; -3[$ et $t(I) =]-\infty; 0[$
   Or la fonction m est strictement décroissante sur $t(I)$
   donc $f = m \circ t$ est strictement décroissante sur $I =]-\infty; -3[$
   • La fonction t est strictement croissante sur $I =]-3; +\infty[$ et $t(I) =]-0; +\infty[$
   Or la fonction m est strictement décroissante sur $t(I)$
   donc $f = m \circ t$ est strictement décroissante sur $I =]-3; +\infty[$

   Conclusion des trois méthodes :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	