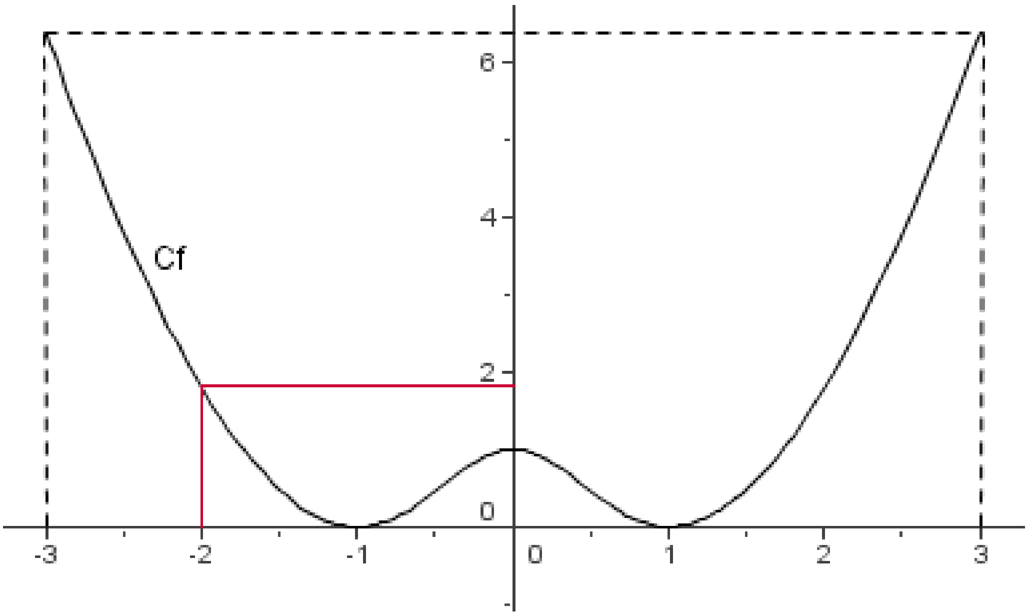
Exercice 01 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$$

1. $f(x)$ existe si et seulement si $1+x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$ (Propriété toujours vraie ...)
   Donc $D_f = \mathbb{R}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1-x^2)^2$ est positif comme le carré d'un nombre réel.
   De plus $1+x^2$ est positif comme somme de deux positifs.
   On peut donc conclure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
3. $D_f = \mathbb{R}$ donc D_f est symétrique par rapport à 0.
   De plus :
   $f(-x) = \dfrac{(1-(-x)^2)^2}{1+(-x)^2} = \dfrac{(1-x^2)^2}{1+x^2} = f(x)$
   donc f est paire et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $(O, \overrightarrow{j})$.
4. Courbe représentative de f :



5. – Par lecture graphique, on trouve que 1 est le maximum de f sur l'intervalle $[-1;1]$
   – Par lecture graphique, on trouve que $1,8$ est le maximum de f sur l'intervalle $[-2;1]$
6. $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \leq 0$
   Or $f(x) - 1 = \dfrac{(1-x^2)^2}{1+x^2} - 1 = \dfrac{(1-x^2)^2}{1+x^2} - \dfrac{1+x^2}{1+x^2} = \dfrac{1-2x^2+x^4-1-x^2}{1+x^2}$
   $f(x) - 1 = \dfrac{x^4-3x^2}{1+x^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{1+x^2} = \dfrac{x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{1+x^2}$
   Il faut donc résoudre l'inéquation : $\dfrac{x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{1+x^2} \leq 0$
   Calcul des valeurs particulières :
   $x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$
   Il faut donc maintenant dresser le tableau des signes de l'expression : $A = \dfrac{x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{1+x^2}$

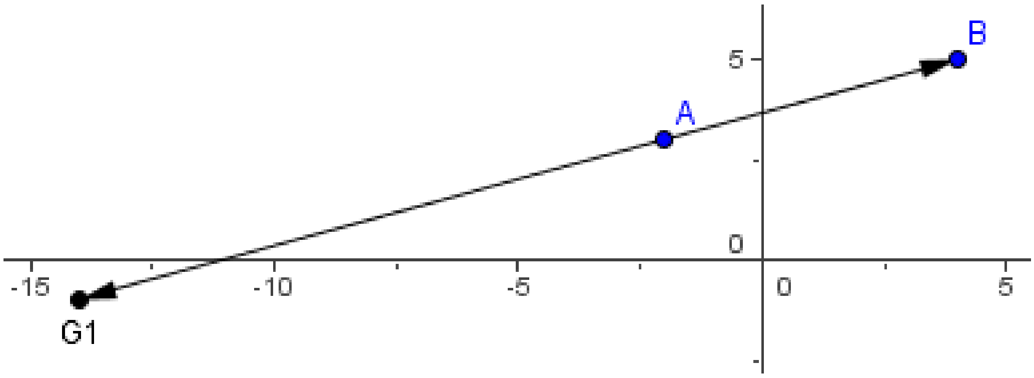
x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$-\infty$
x^2		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
A		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

   donc l'ensemble des solutions est $S = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

Exercice 02 :

On note A et B deux points de coordonnées $A(-2,3)$ et $B(4;5)$ dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

1. G_1 est le barycentre de $(A;-3)(B;2)$
   Comme $-3+2=-1\neq 0$ alors G_1 existe et d'après un des théorèmes du cours, on a :
   $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{-3+2}\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AB}$



2. G_2 est le barycentre de $(A;2160)(B;-1800)$
   Comme $2160-1800=360\neq 0$ alors G_2 existe et d'après un des théorèmes du cours, comme $pgcd(2160;1800)=360$ on a :
   G_2 est le barycentre de $(A;6)(B;-5)$
   Donc d'après un autre théorème du cours, les coordonnées de G_2 sont :
   $G_2\left(\dfrac{6(-2)-5(4)}{6-5};\dfrac{6(3)-5(5)}{6-5}\right)$ donc $G_2\,(-32;-7)$
3. G_1 est le barycentre de $(A;-3)(B;2)$
   donc d'après un des théorèmes du cours, pour tout point M du plan, on a :
   $\| -3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=7 \Leftrightarrow \|(-3+2)\overrightarrow{MG_1}\|=7 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG_1}\|=7$
   L'ensemble $(\mathcal{C}_1)$ des points M est donc le cercle de centre G_1 et de rayon 7.
4. G_1 est le barycentre de $(A;-3)(B;2)$
   G_2 est le barycentre de $(A;6)(B;-5)$
   donc d'après un des théorèmes du cours, pour tout point M du plan, on a :
   $\| -3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=\| 6\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\|$
   $\Leftrightarrow\|(-3+2)\overrightarrow{MG_1}\|=\|(6-5)\overrightarrow{MG_2}\|\Leftrightarrow\|\overrightarrow{MG_1}\|=\|\overrightarrow{MG_2}\|$
   de plus :
   G_1 est le barycentre de $(A;-3)(B;2)$
   Donc d'après un autre théorème du cours, les coordonnées de G_1 sont :
   $G_1\left(\dfrac{-3(-2)+2(4)}{-3+2};\dfrac{-3(3)+2(5)}{-3+2}\right)$ donc $G_1\,(-14;-1)$ Or
   $MG_1^2=(x_{G_1}-x)^2+(y_{G_1}-y)^2=(-14-x)^2+(-1-y)^2$
   et
   $MG_2^2=(x_{G_2}-x)^2+(y_{G_2}-y)^2=(-32-x)^2+(-7-y)^2$
   L'équation de $\mathcal{C}_2$ est donc :
   $(-14-x)^2+(-1-y)^2=(-32-x)^2+(-7-y)^2$
   $\Leftrightarrow$196+28x+x$^2+1+2y+y^2=1024+64x+x^2+49+14y+y^2$
   $\Leftrightarrow 197+28x+2y=1073+64x+14y$
   $\Leftrightarrow 12y+36x+876=0$
   donc l'équation de $(\mathcal{C}_2)$ est $12y+36x+876=0$