Exercice 1 : (6 points)

1. $f(x)$ existe $\iff x+1 \neq 0 \iff x \neq -1$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
2. Coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.
   $fx) = 0 \iff x^2 - 3 = 0 \iff x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$
   Donc les deux points d'intersection sont $A(\sqrt{3}; 0)$ et $B(-\sqrt{3}; 0)$
3. Coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées.
   $f(0) = -3$ donc le point d'intersection est $C(0; -3)$
4. Tableau des signes de $f(x)$ et la position relative de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   • $x^2 - 3$ s'annule en $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$
   • $x + 1$ s'annule en $x = -1$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2 - 3$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Position		$\mathcal{C}_f$ en-dessous de (ox)	$\|$	$\mathcal{C}_f$ au-dessus de (ox)	$\|\|$	$\mathcal{C}_f$ en-dessous (ox)	$\|$	$\mathcal{C}_f$ au-dessus de (ox)	

5. Pour tout $x \neq -1$, $f(x) - (x-1) = \dfrac{(x^2-3) - (x-1)(x+1)}{x+1} = \dfrac{x^2 - 3 - x^2 + 1}{x+1} = -\dfrac{2}{x+1}$
   Position relative de $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x - 1$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
-2		$-$	$\|$	$-$	
$x + 1$		$-$	0	$+$	
$f(x) - (x-1)$		$+$	$\|\|$	$-$	
Position		$\mathcal{C}_f$ au-dessus de la droite	$\|\|$	$\mathcal{C}_f$ en-dessous de la droite	

Exercice 2 : (4 points)

1. $a < b < 0$
   Or la fonction $x \longmapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ donc $a^2 > b^2$
   or la fonction $x \longmapsto -3x$ est linéaire décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $-3a^2 < -3b^2$
2. $a < b < 0$
   Or la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty; 0[$ donc $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$
   or la fonction $x \longmapsto 4 - x$ est affine décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $4 - \dfrac{1}{a} < 4 - \dfrac{1}{b}$
3. $a < b < 0$
   or la fonction $x \longmapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $a^3 < b^3 < 0$
   Or la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty; 0[$ donc $\dfrac{1}{a^3} > \dfrac{1}{b^3}$
   or la fonction $x \longmapsto 3 + x$ est affine croissante sur $\mathbb{R}$ donc $3 + \dfrac{1}{a^3} > 3 + \dfrac{1}{b^3}$

Exercice 3 : (4 points) On considère les deux fonctions $f : x \longmapsto 3 - 2x^2$ et $g : x \longmapsto \dfrac{2}{x} - 5$

1. $x \in [1; 2]$
   Or la fonction $x \longmapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$ donc $1 \leq x^2 \leq 4$
   or la fonction $x \longmapsto 4 - 5x$ est linéaire décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $-1 \geq f(x) \geq -16$ donc $f(x) \in [-16; -1]$
2. $x \in [-5; 0]$
   Or la fonction $x \longmapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ donc $25 \geq x^2 \geq 0$
   or la fonction $x \longmapsto 4 - 5x$ est linéaire décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $-121 \leq f(x) \leq 4$ donc $f(x) \in [-121; 4]$

3. $x \in [-7;-2]$
   Or la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ donc $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{7}$
   or la fonction affine $x \longmapsto 2x-5$ est croissante dur $\mathbb{R}$ donc $-6 \leq g(x) \leq -\frac{37}{7}$ donc $g(x) \in \left[-6;-\frac{37}{7}\right]$

Exercice 4 : (6 points)

1. On nomme a et b deux réels de $]-\infty;0]$ tels que $a<b$
   la fonction $x \longmapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ donc $a^2>b^2$
   la fonction $x \longmapsto 4-5x$ est affine décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(a)<f(b)$
   donc f est croissante sur $]-\infty;0]$
2. On nomme a et b deux réels de $]0;+\infty[$ tels que $a<b$
   la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
   la fonction $x \longmapsto 3+x$ est affine croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(a)>f(b)$
   donc f est décroissante sur $]0;+\infty[$

Exercice supplémentaire : (2 points)

1. Comme $1+\frac{1}{1000} \in [1;+\infty[$ alors

   $$B=\left(1+\frac{1}{1000}\right) < A=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^2 < C=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^3$$
2. Comme $1-\frac{1}{1000} \in [0;1]$ alors

   $$C=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^3 < A=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^2 < B=\left(1+\frac{1}{1000}\right)$$