

DS08 - 1ES2/1L2	Mathématiques
Année 2011-2012	
Lycée Stendhal de Grenoble	

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

(La calculatrice est autorisée dans ce DS)

Enoncés	Barème																								
<p>Exercice 01 : On souhaite comparer deux jeux de hasard en étudiant les variables aléatoires X et Y qui associent à chaque jeu le gain correspondant en euros. Les lois de probabilité de X et Y sont les suivantes :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">$X = x_i$</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">10</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$P(X = x_i)$</td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{4}$</td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{3}$</td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{4}$</td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{12}$</td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{12}$</td> </tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">$Y = y_i$</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">10</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$P(Y = y_i)$</td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{3}$</td> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{12}$</td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{4}$</td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{6}$</td> </tr> </table> <ol style="list-style-type: none"> 1. Démontrer que $a = \frac{1}{6}$ 2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ 3. Que peut-on dire sur les deux jeux ? 	$X = x_i$	-2	1	2	5	10	$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$Y = y_i$	-2	1	2	5	10	$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	4 pts
$X = x_i$	-2	1	2	5	10																				
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$																				
$Y = y_i$	-2	1	2	5	10																				
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$																				
<p>Exercice 02 : Un sac contient 6 jetons numérotés 1, 5 jetons numérotés 2, 4 jetons numérotés 3, 3 jetons numérotés 4, 2 jetons numérotés 5 et un jeton numéroté 6. On pioche au hasard un jeton du sac.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Un jeu est organisé ainsi : Pour une mise de 3 €, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton. On définit la variable aléatoire X donnant le gain d'un joueur. <ol style="list-style-type: none"> a. Déterminer la loi de probabilité de X b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat. 2. Pour rendre ce jeu équitable on décide de modifier le gain correspondant au jeton numéro 6. Déterminer le gain à affecter au tirage de ce jeton. 	4 pts																								
<p>Exercice 03 : Une urne contient 5 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 vertes. On tire simultanément 3 boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Quelles sont les valeurs prises par X ? 2. Décrire l'événement « $X=2$ », puis l'événement « $X>2$ » 3. Déterminer la loi de probabilité de X. 	3 pts																								

Exercice 04 : (Déjà fait en classe ☺)

Une urne contient 5 boules rouges et $(n-5)$ boules noires numérotées de 1 à n où n est un entier supérieur ou égal à 5.

Partie A : Tirage avec remise

Un joueur tire au hasard, successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1. Faire un arbre pondéré modélisant la situation.
2. Déterminer la probabilité de l'événement A : « les deux boules sont de couleurs différentes », en fonction de n .

Partie B : Tirage sans remise

Un joueur tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Faire un arbre pondéré modélisant la situation.
2. Le joueur gagne 2 euros si les deux boules sont de couleurs différentes et perd un euro dans le cas contraire. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
 - a. Donner en fonction de n la loi de probabilité de X .
 - b. Montrer que $E(X) = \frac{-n^2 + 31n - 150}{n^2 - n}$
 - c. Déterminer n pour que le jeu soit équitable.

9 pts

Exercice Bonus :

X est une variable aléatoire d'espérance $E(X)$, d'écart-type $\sigma(X) \neq 0$.

On note Y la variable aléatoire $Y = \frac{E(X) - X}{\sigma(X)}$

1. Démontrer que $E(Y) = 0$
2. Démontrer que $V(Y) = 1$

2 pts