

Exercice 01 :

On note f et g deux fonctions polynômes du second degré, définies par : $f : x \mapsto 2x^2 + 2x - 4$ et $g : x \mapsto -(x+3)(x+2)$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g leur représentation graphique respectives dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j})

1. f et g sont des polynômes du second degré donc $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

Forme canonique de $f(x)$:

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 4 = 2(x^2 + x - 2) = 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right) = 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$$

Forme factorisée de $f(x)$:

$$f(x) = 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = 2(x+2)(x-1)$$

3. Forme développée de $g(x)$:

$$g(x) = -(x+3)(x+2) = -(x^2 + 2x + 3x + 6) = -(x^2 + 5x + 6) = -x^2 - 5x - 6$$

Forme canonique de $g(x)$:

$$g(x) = -(x^2 + 5x + 6) = -\left(\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6\right) = -\left(\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

4. Coordonnées des point d'intersection entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses.

D'après la forme factorisée, les points d'intersection sont $A(1;0)$ et $B(-2;0)$

Coordonnées des point d'intersection entre \mathcal{C}_f et l'axe des ordonnées.

D'après la forme développée, le point d'intersection est $C(0; -4)$

5. Coordonnées des point d'intersection entre \mathcal{C}_g et l'axe des abscisses.

D'après la forme factorisée, les points d'intersection sont $D(-3;0)$ et $B(-2;0)$

Coordonnées des point d'intersection entre \mathcal{C}_g et l'axe des ordonnées.

D'après la forme développée, le point d'intersection est $E(0; -6)$

6. Tableau des variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f		\searrow	\nearrow
		$-\frac{9}{2}$	

Tableau des variations de g :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
f		\nearrow	\searrow
		$\frac{1}{4}$	

7. \mathcal{C}_f est une parabole tournée vers le haut, de sommet $S_1\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{2}\right)$

\mathcal{C}_g est une parabole tournée vers le bas de sommet $S_2\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right)$

8. $M \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g$

$$\iff f(x) = g(x)$$

$$\iff 2(x-1)(x+2) = -(x+3)(x+2)$$

$$\iff 2(x-1)(x+2) + (x+3)(x+2) = 0$$

$$\iff (x+2)(2x-2+x+3) = 0$$

$$\iff (x+2)(3x+1) = 0$$

$$\iff x = -2 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

De plus

$$f(-2) = g(-2) = 0$$

et

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{40}{9}$$

donc les points d'intersection entre \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont :

$$B(-2; 0) \text{ et } F\left(-\frac{1}{3}; -\frac{40}{9}\right)$$

9. Etudions le signe de $f(x) - g(x)$:

$f(x) - g(x) = (x + 2)(3x + 5)$ d'après la question précédente.

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$x + 2$	-	0	+	+
$3x + 5$	-	-	0	+
$f(x) - g(x)$	+	0	-	+

Donc

Si $x \in]-\infty; -2[\cup]-\frac{1}{3}; +\infty[$ alors \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g .

Si $x \in]-2; -\frac{1}{3}[$ alors \mathcal{C}_f est en dessous de \mathcal{C}_g .