Exercice :

On note f la fontion $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$

1. $f(x)$ est un polynôme du second degré donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$.

2. On cherche α et β deux réels tels que $f(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 + \beta$

   $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \beta = \frac{1}{2}x^2 - \alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 + \beta$

   Par identification avec la forme développée, on a :

   $$\begin{cases} -\alpha = -3 \\ \frac{1}{2}\alpha^2 + \beta = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

   Donc $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{5}{2}}$

3. Tableau des variations de f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f		$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	

4. $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}[(x-3)^2 - 5] = \boxed{\frac{1}{2}(x-3+\sqrt{5})(x-3-\sqrt{5})}$

5. Tableau des signes de $f(x)$

   $x \mapsto x - 3 + \sqrt{5}$ est une fonction affine croissante qui s'annule en $x = 3 - \sqrt{5}$

   $x \mapsto x - 3 - \sqrt{5}$ est une fonction affine croissante qui s'annule en $x = 3 + \sqrt{5}$

x	$-\infty$		$3-\sqrt{5}$		$3+\sqrt{5}$		$+\infty$
$x-3+\sqrt{5}$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3-\sqrt{5}$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

6. La forme développée de $f(x)$ est $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ donc $A(0;2)$ est le point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées.

   Le forme factorisée est $f(x) = \frac{1}{2}(x-3+\sqrt{5})(x-3-\sqrt{5})$ donc $B(3+\sqrt{5};0)$ et $C(3-\sqrt{5};0)$ sont les points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.

7. Représentation graphique de la fonction f :