Fonctions polynômes du second degré

Première ES/L

M Obaton
Lycée Stendhal

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Année 2011-2012

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODE	INTITULE	Bilan		
		A	EA	NA
A0101	Trouver la forme développée			
A0102	Trouver la forme factorisée			
A0103	Trouver la forme canonique			
A0104	Déterminer les racines d'une fonction polynôme du second degré			
A0105	Déterminer le signe d'une fonction polynôme du second degré			
A0106	Dresser le tableau des signes d'une expression plus complexe.			
A0107	Résoudre un problème se ramenant à une équation du second degré			
A0108	Décrire les variations d'une fonction polynôme du second degré			
A0109	Décrire la courbe d'une fonction polynôme du second degré			
A0110	Tracer correctement l'allure de la courbe d'une fonction du second degré			

Fonctions polynôme du second degré

(En première ES/L)

Dernière mise à jour : Mardi 16 Août 2011

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de maîtriser parfaitement les fonctions polynômes du second degré, différentes formes, racines du polynôme, signes du polynômes, tableaux des variations et courbes représentative. il faut ensuite savoir utiliser ces nouvelles connaissances dans des exercices plus complets et en ayant encore vos connaissances de seconde sur les fonctions de référence.

2 Les fonctions du second degré

2.1 Définition

Les fonctions polynômes du second degré sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{f : x \longmapsto ax^2 + bx + c \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ , } b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exemples :

1. $f : x \longmapsto x^2$
2. $f : x \longmapsto 4x^2 + 5x - 7$
3. $f : x \longmapsto 4(x-2)^2 + 5$
4. $f : x \longmapsto -3(x-1)(2+x)$
5. $f : x \longmapsto (x+1)^3 - x^3$
6. $f : x \longmapsto \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{4}$

2.2 Domaine de définition

$f(x)$ existe pour toutes les valeurs de x réels donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2.3 Les différentes formes

Les fonctions polynômes du second degré peuvent avoir plusieurs formes :

1. Forme développer : $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$
2. Forme factorisée : $f : x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ (Cette forme n'existe pas toujours)
3. Forme canonique : $f : x \longmapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$

Vous devez êtres capable de passer de l'une à l'autre sans problème.

Démontrons que toutes les fonctions polynômes du second degré peuvent se mettre sous la forme canonique :
On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$
Comme $a \neq 0$ alors on peut factoriser par a

$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

De plus $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ est le début d'une identité remarquable :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

Il reste à injecter cette relation dans $P(x)$

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} - \frac{-4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

On note $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ alors

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

En posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$ alors

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Réciproquement, si $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$

montrons qu'on peut le mettre sous forme développée
$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \beta = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta$
En posant $b = -2a\alpha$ et $c = a\alpha^2 + \beta$ alors
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

Conclusion
Tous les polynômes du second degré peuvent se mettre sous la forme canonique, il existe donc $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

1. Exemple pour déterminer la forme développée à partir de la forme factorisée ?
   C'est simple il suffit de développer l'expression !
   $f(x) = 2(3-x)(x+2)$ déinie sur $\mathbb{R}$
   $f(x) = 2(3x + 6 - x^2 - 2x) = 6x + 12 - 2x^2 - 4x = -2x^2 + 2x + 12$ donc
   $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$

2. Exemple pour déterminer la forme développée à partir de la forme canonique ?
   C'est simple il suffit de développer l'expression !
   $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ déinie sur $\mathbb{R}$
   $f(x) = 2(x^2 - 6x + 9) + 5 = 2x^2 - 12x + 18 + 5 = 2x^2 - 12x + 23$ donc
   $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$
3. Exemple pour déterminer la forme canonique à partir de la forme développée ?
   Il y a plusieurs méthodes possibles et l'on va en donner trois :
   (a) En utilisant le même méthode que lors de la dernière démonstration.
   On utilise le début d'une identité remarquable.
   $f(x) = 4x^2 - 4x + 4 = 4(x^2 - x + 1) = 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1\right] =$
   $4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} + 1\right] = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$
   (b) En utilisant l'identification entre la forme que l'on souhaite et la forme que l'on a
   $f(x) = 4x^2 - 4x + 4$ est la forme développée.
   On souhaite la forme canonique : $f(x) = 4(x-\alpha)^2 + \beta$
   On développe la forme canonique et on identifie ave la forme factorisée.
   $f(x) = 4(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \beta = 4x^2 - 8\alpha x + 4\alpha^2 + \beta$
   On identifie avec $f(x) = 4x^2 - 4x + 4$
   Alors $\left\{\begin{array}{l} -8\alpha = -4 \\ 4\alpha^2 + \beta = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \\ 4\alpha^2 + \beta = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \\ 1 + \beta = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 3 \end{array}\right.$
   donc $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$
   (c) Il suffit d'utiliser la formule : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$
   Avec $a = 4$, $b = -4$, $c = 4$ et $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(16) = -48$
   On obtient donc $\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{\Delta}{4a} = -\frac{48}{16} = 3$
   Donc $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$
4. Exemple pour déterminer la forme canonique à partir de la forme factorisée ?
   Le plus simple est de développer et de faire comme dans le paragraphe précédent.
5. Exemple pour déterminer la forme factorisée à partir de la forme canonique ?
   Ce n'est possible dans $\mathbb{R}$ que si β est positif sinon on ne peut pas factoriser dans l'ensemble des réels.
   Exemple : $f(x) = 4(x-2)^2 - 16 = 4[(x-2)^2 - 4] = 4[(x-2)^2 - 2^2] =$
   $4(x - 2 + 2)(x - 2 - 2) = 4x(x-4)$
6. Exemple pour déterminer la forme factorisée à partir de la forme développée ?

Il faut soit factoriser avec les méthodes classiques soit passer par la forme canonique, mais ce n'est pas toujours possible dans l'ensemble des réels.
Exemple 01 : $f(x) = 4x^2 - 16x = 4x(x-4)$
Exemple 02 : $f(x) = 4x^2 - 25 = (2x)^2 - (5)^2 = (2x-5)(2x+5)$
Exemple 03 :
$f(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3) = 2[(x-1)^2 - 1 - 3] = 2[(x-1)^2 - 4]$
donc $f(x) = 2[(x-1)^2 - 2^2] = 2(x-1-2)(x-1+2) = 2(x-3)(x+1)$

Exercices en classe	Exercices 1-3-4-7 pages 78
Exercices en classe	Exercices 54-56-57 page 81
Exercices en classe	Exercices 44-45-48 à 53 page 80-81
Autonomie	Exercices 2-5 page 78et 46-47 page 81

2.4 Variation et courbe représentative (Rappels de seconde)

2.4.1 Tableau des variations

Ce paragraphe a déjà été abordé en seconde donc je vais redonner les résultats.
On utilise la forme canonique :

$$f : x \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Il y a deux cas à prévoir : Soit $a > 0$ ou $a < 0$
Résultats de seconde : (A connaître par coeur)

1. Si $a > 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

β est donc le minimum de f atteint pour $x = \alpha$

2. Si $a < 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

β est donc le maximum de f atteint pour $x = \alpha$

2.4.2 Représentations graphiques

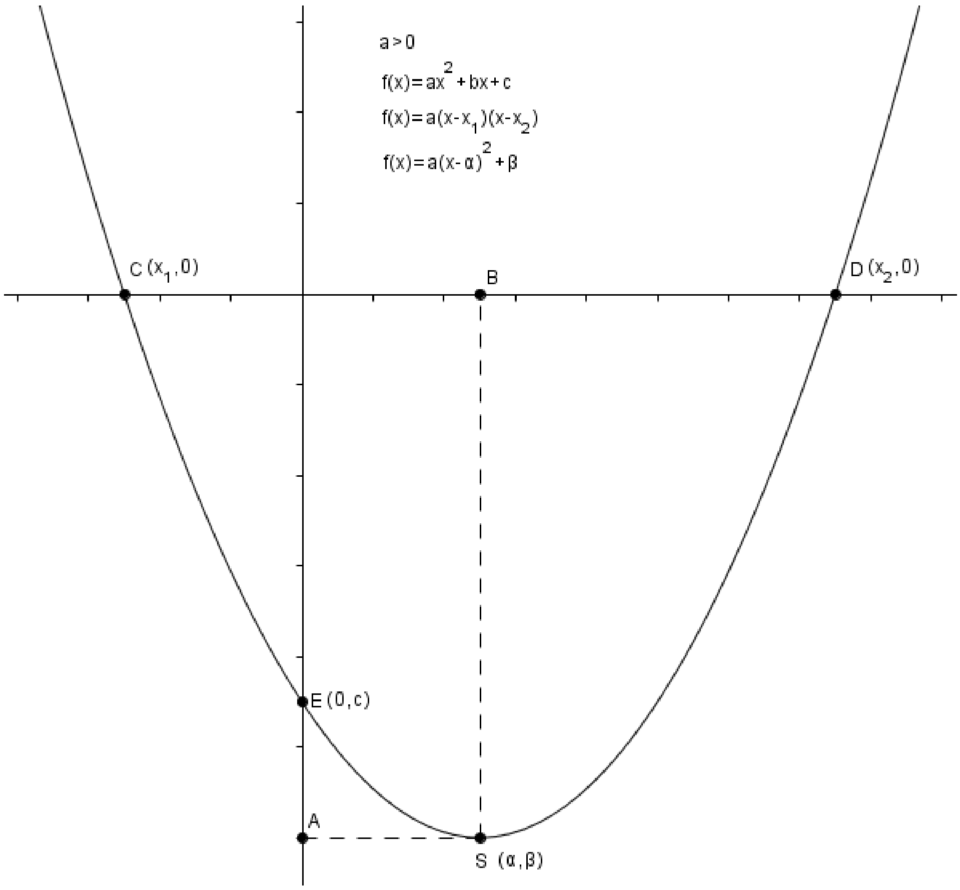
Ce paragraphe aussi est un résultat de seconde. La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole tournée vers le haut ou vers le bas et dont le sommet est donné par la forme canonique :

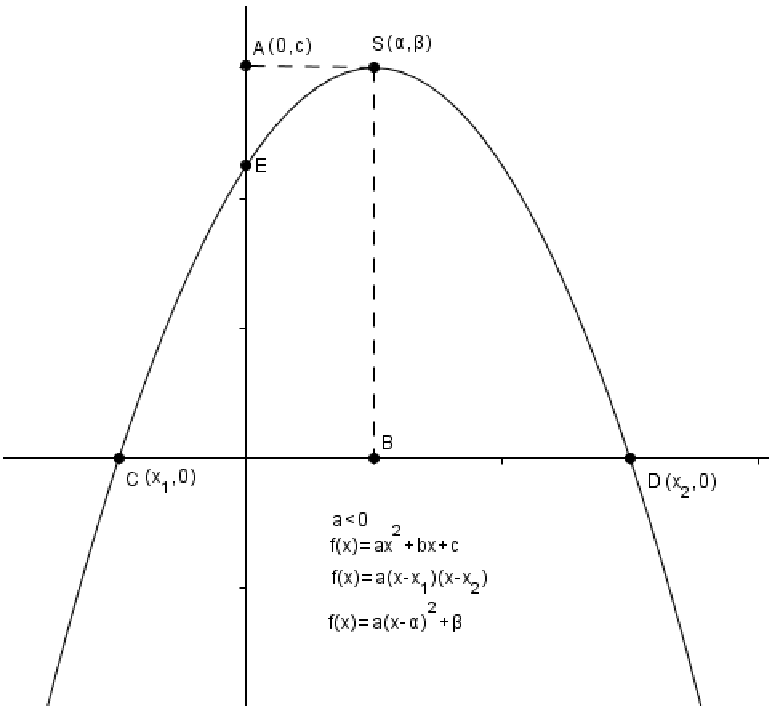
$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Résultats de seconde : (A connaître par coeur)

1. Si $a > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le haut et de sommet
$$S(\alpha;\beta)$$
2. Si $a < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le bas et de sommet
$$S(\alpha;\beta)$$

Conclusion :





Exercices en classe	Exercices 8 à 13 page 78-79
Exercices en classe	Exercices 15 à 18 page 79+ 51 page 81
Autonomie	Exercices 14 page 79+ 55 page 81

3 Equations et Inéquations du second degré

Vocabulaire :
On note **Racines du polynômes** f, les réels vérifiant :

$$f(x) = 0$$

.
Exemple :
On note $f : x \mapsto 2x^2 - 4x - 6$ une fonction polynômes du second degré.
Pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = \boxed{2x^2 - 4x - 6} = 2(x^2 - 2x - 3) = 2\left[(x-1)^2 - 1 - 3\right]$
$= 2\left[(x-1)^2 - 4\right] = \boxed{2(x-1)^2 - 8}$
$= 2\left[(x-1)^2 - 4\right] = 2\left[(x-1)^2 - (2)^2\right] = 2[(x-1)-2][(x-1)+2]$
$= 2(x-1-2)(x-1+2) = \boxed{2(x-3)(x+1)}$

$f(x) = 0 \iff 2(x-3)(x+1) = 0 \iff x = 3$ ou $x = -1$
Les racines de $f(x)$ sont 3 et -1.
Les solutions de $f(x) = 0$ sont 3 et -1.

3.1 Racines du polynômes

Les racines d'un polynômes f sont les réels x vérifiant $f(x) = 0$. Ce sont les solutions de l'équations $f(x) = 0$.

Approche théorique de la recherche des racines de $f(x)$:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

On factorise par a car $a \neq 0$ et donc $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

$x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début d'une identité remarquable :

$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

On peut donc remplacer $x^2 + \frac{b}{a}x$ par $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

donc

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

On nomme maintenant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ **le discriminant du polynôme** $f(x)$.

Alors

$$\boxed{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$$

Peut-on factoriser la partie $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$?

Il y a trois cas possibles :

1. Si $\Delta = 0$ c'est déja factorisé !
2. Si $\Delta > 0$ alors on peut factoriser à l'aide d'une identité remarquable.
3. Si $\Delta < 0$ alors on ne peut pas factoriser dans $\mathbb{R}$.

Etudions les deux cas possibles :

1. Si $\Delta = 0$:
   $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right)$
   $f(x) = 0$
   $\Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{b}{2a} = 0$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$

Donc la racine de $f(x)$ est l'unique réel $x = -\dfrac{b}{2a}$

2. Si $\Delta > 0$:

$f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$

$f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$f(x) = a\left(x + \dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$f(x) = a\left(x - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $x - \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Il y a donc deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Conclusion : (A connaître par coeur)

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$:

1. Si $\Delta = 0$ alors il y a une seule racine $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ et $f(x) = a(x - x_1)^2$
2. Si $\Delta > 0$ alors il y a deux racines réels distinctes $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
3. Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de racine réelle. Attention cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de racine du tout, mais elles ne sont pas dans $\mathbb{R}$.(Voir terminale)

Exercices en classe	Exercices 19 à 21, 24 à 27, 29 à 32, 34 à 43 pages 79-80
Autonomie	Exercices 22-23-28-33 page 79-80

3.2 Tableau des signes

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$. Étudions le signe de $f(x)$ suivant le signe de Δ :

1. Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

   Dans $\mathbb{R}$ le réel $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ est toujours positif donc le signe de $f(x)$ est le même que celui de a.
   Conslusion :

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

2. Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a\left(x - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

   Si on note $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
   alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x - x_1)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x - x_2)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
a		Signe de a	|	Signe de a	|	Signe de a	
$f(x)$		Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a	

3. Si $\Delta < 0$ alors $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

   et donc $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right]$

   Dans les crochets, tous les nombres sont positifs dans $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ est du signe de a et ne s'annule pour aucun réel.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

Conclusion : (A connaître par coeur)

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$:

1. Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

2. Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x - x_1)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x - x_2)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
a		Signe de a	|	Signe de a	|	Signe de a	
$f(x)$		Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a	

3. Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

Exercices en classe	Exercices 58-59-61 à 64-66 à 68-70 à 82 page 82-83
Autonomie	Exercices 60-65-69 page 82

3.3 Résolution de systèmes à l'aide du second degré

On souhaite résoudre le système : $\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ xy=-35 \end{array}\right.$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ xy=-35 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-y \\ (2-y)y=-35 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-y \\ -y^2+2y+35=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-y \\ y^2-2y-35=0 \end{array}\right.$$

Il suffit de résoudre l'équation $y^2-2y-35=0$ pour trouver les valeurs de y puis d'en déduire celles de x.

(A vous de continuer et ensuite de vérifier que les valeurs trouvées vérifient le système du départ.)

3.4 Différentes inéquations

A l'aide des tableaux de signes des polynômes du second degré, nous pouvons dresser le tableau des signes d'expressions plus complexes qu'en seconde, avec des facteurs qui seront des polynômes du second degré.

Exemple 01 :

On souhaite résoudre l'inéquation : $-3(x-1)(x^2+x-6)\leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

-3 est un nombre négatif et ne s'annule pas.

$x-1$ est positif si x est plus grand que 1 et $x-1$ s'annule en 1

Étudions le signe de x^2+x-6.

Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(-6)=1+24=25=5^2$

$\Delta>0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2$$

et

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

On va pouvoir dresser le tableau des signes de l'expression

$P(x)=-3(x-1)(x^2+x-6)$, à l'aide des paragraphes précédents :

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
-3		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+x-6		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3; 1] \cup [2; +\infty[$

FIN DU CHAPITRE

Autonomie	QCM Page 84 et 88+ Prêt pour le contrôle page 84
Problèmes	Pb 101-103-106-108-page 86-87
Geogebra	PB 112 page 87
Algorithmes	Ex 38 page 80 + 79 page 83+Pb 113 page 87