Les fonctions de référence

Première ES/L

L'équipe des professeurs de mathématiques
Lycée Stendhal

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Année 2011-2012

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODE	INTITULE	Bilan		
		A	EA	NA
A0201	Connaître les variations des fonctions affines			
A0202	Connaître les variations de la fonction inverse			
A0203	Connaître les variations de la fonction racine carrée			
A0204	Connaître les variations de la fonction cube			
A0205	Décrire et tracer l'allure des courbes des fonctions précédentes			
A0206	Etudier la position relative des courbes des fonctions précédentes			
A0207	Etudier l'intersection des courbes avec les axes du repère.			
A0208	Déterminer l'expression d'une fonction à l'aide de sa courbe.			

Les Fonctions de Référence

(En première ES/L)

Dernière mise à jour : Vendredi 28 Octobre 2011

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de connaître parfaitement les fonctions de référence (fonctions affines, fonction carré, fonction racine carrée et fonction cube) et de savoir utiliser ces connaissances dans des exercices pour étudier des variations de façon simples et rapide.

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2 Les fonctions de référence

2.1 Les fonctions affines

2.1.1 Définition

Les fonctions affines sont les fonctions de la forme : $\boxed{f : x \longmapsto ax + b}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

1. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors f est **une fonction affine**.
2. Si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors f est **une fonction affine linéaire**.
3. Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors f est **une fonction affine constante**.

Exemples :

1. $f : x \longmapsto 2x + 3$ est une fonction affine.
2. $f : x \longmapsto 3 - 2x$ est une fonction affine.
3. $f : x \longmapsto 4x$ est une fonction affine linéaire.
4. $f : x \longmapsto 5$ est une fonction affine constante.

2.1.2 Ensemble de définition

$$f : x \longmapsto ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ existe pour toutes les valeurs réelles donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$
Toutes les fonctions affines sont définies sur $\mathbb{R}$.

2.1.3 Signes

$$f : x \longmapsto ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

▷ **Si** $a = 0$ $f(x)$ est donc du signe de b

▷ **Si** $a > 0$ Etude du signe de $f(x)$

1. $f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow ax + b \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -\dfrac{b}{a}$
2. $f(x) \leq 0 \Longleftrightarrow ax + b \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq -\dfrac{b}{a}$

▷ **Si** $a < 0$ Etude du signe de $f(x)$

1. $f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow ax + b \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq -\dfrac{b}{a}$
2. $f(x) \leq 0 \Longleftrightarrow ax + b \leq 0 \Longleftrightarrow x \geq -\dfrac{b}{a}$

Conclusion :

▷ **Si** $a = 0$ Tableau des signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de b	

▷ **Si** $a \neq 0$ Tableau des signes :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de $-a$	0	Signe de a	

2.1.4 Variations

$$f : x \longmapsto ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

On note x_1 et x_2 deux nombres réels tels que :

$$x_1 < x_2$$

Comparons $f(x_1)$ et $f(x_2)$:
$f(x_1) - f(x_2) = [ax_1 + b] - [ax_2 + b] = ax_1 + b - ax_2 - b = a(x_1 - x_2)$

▷ **Si** $a > 0$ Comme $x_1 < x_2$ alors $x_1 - x_2 < 0$ donc $f(x_1) - f(x_2) < 0$ donc
$\boxed{f(x_1) < f(x_2)}$
Or $x_1 < x_2$ donc les antécédents et les images sont dans le même ordre donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

▷ **Si** $a < 0$ Comme $x_1 < x_2$ alors $x_1 - x_2 < 0$ donc $f(x_1) - f(x_2) > 0$ donc
$\boxed{f(x_1) > f(x_2)}$
Or $x_1 < x_2$ donc les antécédents et les images sont dans l'ordre contraire donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Conclusion :

▷ **Si** $a > 0$ Tableau des variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\nearrow$	

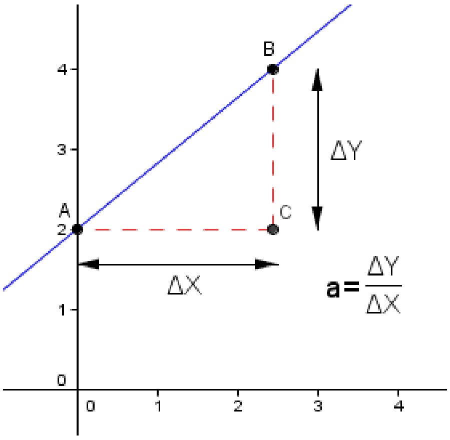
▷ **Si** $a < 0$ Tableau des variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\searrow$	

2.1.5 Courbe représentative

$$f : x \longmapsto ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction affine est une droite passant par le point $(o; b)$ et de pente a.



2.2 La fonction carré

2.2.1 Définition

La fonction carré est :

$$\boxed{f : x \longmapsto x^2}$$

Rappels :

1. $f : x \longmapsto x^2$ (Forme développée)
2. $f : x \longmapsto 1(x - 0)^2 + 0$ (Forme canonique)
3. $f : x \longmapsto 1(x - 0)(x - 0)$ (Forme factorisée)

L'étude de cette fonction a été faite dans le chapitre 01 donc nous allons juste écrire les conclusions sans les redémontrer.

2.2.2 Ensemble de définition

$$\boxed{f : x \longmapsto x^2}$$

$f(x)$ existe pour toutes les valeurs réelles de x donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2.2.3 Signes

Tableau des signes de la fonction carré :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

2.2.4 Variations

$$\boxed{f : x \longmapsto x^2}$$

La forme canonique est $f(x) = 1(x-0)^2 + 0$
Tableau des variations :

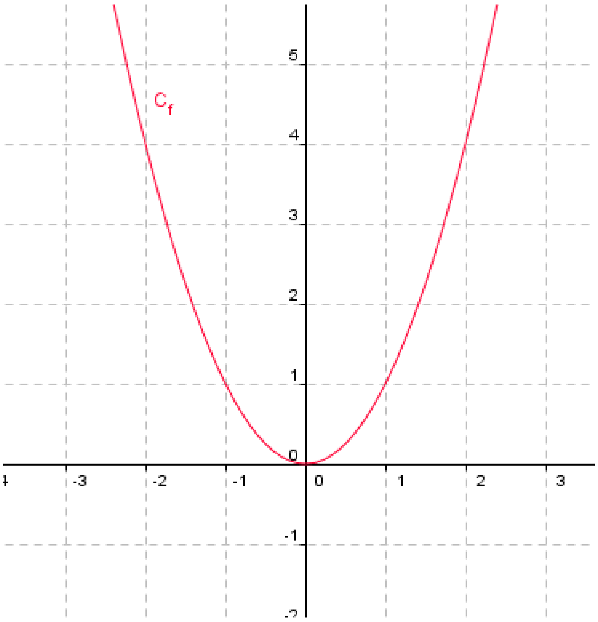
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

0 est donc le minimum de f atteint pour $x = 0$

2.2.5 Courbe représentative

$$\boxed{f : x \longmapsto x^2}$$

$\mathcal{C}_f$ est une parabole dont les branches sont tournées vers le haut, de sommet $S\,(0;0)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$



2.3 La fonction inverse

2.3.1 Définition

La fonction inverse est la fonction $\boxed{f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}}$

2.3.2 Ensemble de définition

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

$f(x)$ existe $\Longleftrightarrow x \neq 0$ donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ ou $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$

2.3.3 Signes

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

- $f(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0$
- $f(x) < 0 \Longleftrightarrow x < 0$

Donc le tableau des signes de la fonction inverse est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	

2.3.4 Variations

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

- Etudions les variations de f sur $]-\infty; 0[$

  On note a et b deux nombres réels tels que :

  $$\boxed{a < b < 0}$$

  Comparons $f(a)$ et $f(b)$:

  $f(a) - f(b) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{ab} - \dfrac{a}{ab} = \dfrac{b-a}{ab}$

  ◇ On sait que $a < b$ donc $b - a > 0$ (Positif)

  ◇ On sait que $a < 0$ et $b < 0$ donc $ab > 0$ (Positif)

  Donc $f(a) - f(b) > 0 \Longleftrightarrow \boxed{f(a) > f(b)}$

  Conslusion : Les antécendents et les images sont dans l'ordre contraire donc f est décroissante sur $]-\infty; 0[$.

- Etudions les variations de f sur $]0; +\infty[$

  On note a et b deux nombres réels tels que :

  $$\boxed{0 < a < b}$$

  Comparons $f(a)$ et $f(b)$:

  $f(a) - f(b) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{ab} - \dfrac{a}{ab} = \dfrac{b-a}{ab}$

  ◇ On sait que $a < b$ donc $b - a > 0$ (Positif)

  ◇ On sait que $a > 0$ et $b > 0$ donc $ab > 0$ (Positif)

  Donc $f(a) - f(b) > 0 \Longleftrightarrow \boxed{f(a) > f(b)}$

  Conslusion : Les antécendents et les images sont dans l'ordre contraire donc f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

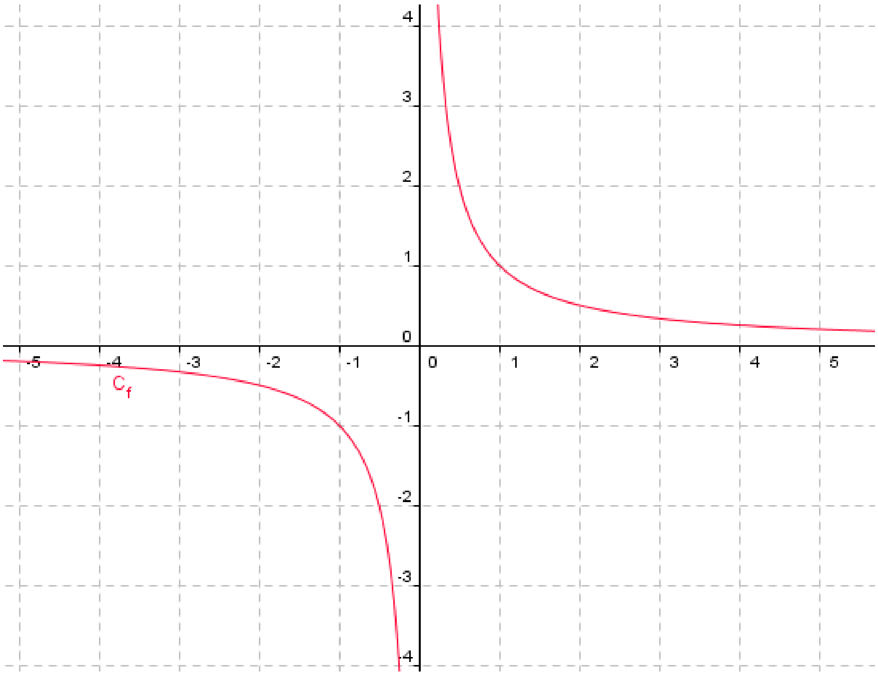
Donc le tableau des variations de la fonction inverse est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

2.3.5 Courbe représentative

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est une hyperbole de centre de symétrie $O(0;0)$



2.4 La fonction cube

2.4.1 Définition

La fonction cube est $\boxed{f : x \longmapsto x^3}$

2.4.2 Ensemble de définition

$$f : x \longmapsto x^3$$

$f(x)$ existe pour toute les valeurs de x réels $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2.4.3 Signes

$$f : x \longmapsto x^3.$$

Si $x > 0$ alors $x^3 > 0$
Si $x < 0$ alors $x^3 < 0$
Tableau des signes de la fonction racine carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2.4.4 Variations

$$f : x \longmapsto \sqrt{x}.$$

◇ Etudions les variations de f sur $[0; +\infty[$
On nomme a et b deux réels tel que :

$$\boxed{0 \leq a < b}$$

Comparons $f(a)$ et $f(b)$
$f(a) - f(b) = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
◇ On sait que $a < b$ donc $a - b < 0$ (Négatif)
◇ On sait que $a \geq 0$ et $b > 0$ donc par somme et produit $a^2 + ab + b^2 > 0$ (Positif)
Conclusion : $f(a) - f(b) < 0 \Longleftrightarrow \boxed{f(a) < f(b)}$
Les antécédents et les images sont dans le même ordre donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

◇ Etudions les variations de f sur $] - \infty; 0]$
On nomme a et b deux réels tel que :

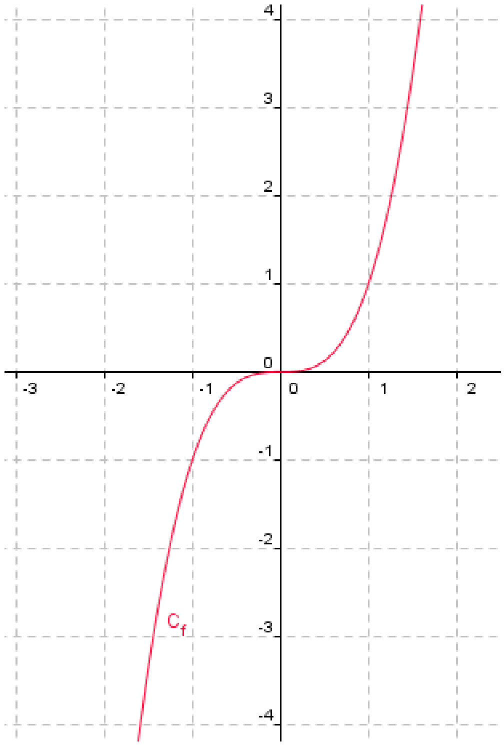
$$\boxed{a < b \leq 0}$$

Comparons $f(a)$ et $f(b)$
$f(a) - f(b) = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
◇ On sait que $a < b$ donc $a - b < 0$ (Négatif)
◇ On sait que $a < 0$ et $b \leq 0$ donc par somme et produit $a^2 + ab + b^2 > 0$ (Positif)
Conclusion : $f(a) - f(b) < 0 \Longleftrightarrow \boxed{f(a) < f(b)}$
Les antécédents et les images sont dans le même ordre donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Tableau des variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	

2.4.5 Courbe représentative



3 Position relative entre les courbes usuelles

On considère les courbes représentatives des fonctions f, g et h définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x \qquad g(x) = x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = x^3$$

et on s'intéresse à la position relatives de ces courbes.

1. **Position relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$**
   Pour tout $x \geq 0$, $g(x) - f(x) = x^2 - x = x(x-1)$ polynôme du second degré de racines $x = 0$ et $x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$g(x) - f(x)$	0	$-$	0	$+$	
Position relative	|	$\mathcal{C}_f$ au dessus de $\mathcal{C}_g$	|	$\mathcal{C}_f$ au dessous de $\mathcal{C}_g$	

2. **Position relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$**
   Pour tout $x \geq 0$, $f(x) - h(x) = x - x^3 = x(1 - x^2)$
   On travaille pour tout $x \geq 0$

De plus $1-x^2$ est un polynôme du second degré de racines -1 et 1 donc $1-x^2$ est positif si $x \in [0;1]$ et négatif si $x \in [1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-h(x)$	0	$+$	0	$-$	
Position relative	|	$\mathcal{C}_f$ au dessus de $\mathcal{C}_h$	|	$\mathcal{C}_f$ au dessous de $\mathcal{C}_h$	

3. **Position relatives de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$**
Pour tout $x \geq 0$, $g(x)-h(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$
On travaille pour tout $x \geq 0$
De plus $1-x$ est un polynôme du premier degré donc $1-x$ est positif si $x \in [0;1]$ et négatif si $x \in [1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)-h(x)$	0	$+$	0	$-$	
Position relative	|	$\mathcal{C}_g$ au dessus de $\mathcal{C}_h$	|	$\mathcal{C}_g$ au dessous de $\mathcal{C}_h$	

4. Propriétés :

P_5 **:** $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ ont deux points communs : $A(0;0)$ et $B(1;1)$

P_6 **:** Pour tout $x \in [0;1]$, $x^3 \leq x^2 \leq x$

P_7 **:** Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $x \leq x^2 \leq x^3$