CHAPITRE 9

# GRAPHES ET CHAÎNES DE MARKOV

Un article du mathématicien suisse **Leonhard Euler**, présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 puis publié en 1741, traitait du problème des sept ponts de Königsberg schématisé par un graphe. Le problème consistait à trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg. Un chemin passant par toute arête exactement une fois fut nommé chemin eulérien. On accorde donc à Euler l'origine de la théorie des graphes parce qu'il fut le premier à proposer un traitement mathématique de la question, suivi par **Vandermonde**.

Un des problèmes les plus connus de la théorie des graphes vient de la coloration de graphe, où le but est de déterminer combien de couleurs différentes suffisent pour colorer entièrement un graphe de telle façon qu'aucun sommet n'ait la même couleur que ses voisins.

**Les contenus du chapitre**

▷ Graphes, sommets, arêtes. Exemples de graphe complet.
▷ Sommets adjacents, degré, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe connexe.
▷ Matrice d'adjacence d'un graphe.
▷ Graphe orienté, pondéré, associé à une chaîne de Markov à deux ou trois états.
▷ Chaîne de Markov à deux ou trois états. Distribution initiale $\Pi_0$, représentée par une matrice ligne. Matrice de transition, graphe pondéré associé.
▷ Pour une chaîne de Markov à deux ou trois états de matrice $P$, interprétation du coefficient $(i, j)$ de $P^n$. Distribution après $n$ transitions, représentée comme la matrice ligne $\Pi_0 P^n$.
▷ Distributions invariantes d'une chaîne de Markov à deux ou trois états.

**Les capacités attendues du chapitre**

▷ Modéliser une situation par un graphe.
▷ Associer un graphe orienté, pondéré à une chaîne de Markov à deux ou trois états.
▷ Dans le cadre de la résolution de problèmes, utiliser le calcul matriciel, notamment l'inverse et les puissances d'une matrice carrée, pour calculer le nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets d'un graphe, étudier une chaîne de Markov à deux ou trois états (calculer des probabilités, déterminer une probabilité invariante).

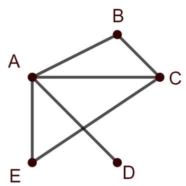
# Cours

## 1. Généralités sur les graphes

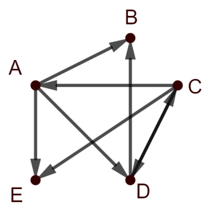
### 1.1. Définitions

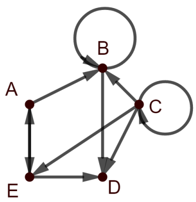
**Définition 1 – Les graphes**

**Un graphe non orienté d'ordre *n*** est un ensemble de $n$ points (**sommets**) reliés (ou non) par des segments (**arêtes**).
**Un graphe** non orienté $G = (S, A)$ est déterminé par les données de deux ensembles : un ensemble fini non vide S dont les éléments sont appelés **sommets** et un ensemble A de paires de sommets appelées **arêtes**.
**Exemple :**




**Un graphe orienté d'ordre *n*** est un ensemble de $n$ points (**sommets**) reliés (ou pas) par des flèches (**arcs**).
Un sommet peut être relié à lui même par une **boucle**.
**Un graphe** orienté $G = (S, A)$ est déterminé par les données de deux ensembles : un ensemble fini non vide S dont les éléments sont appelés **sommets** et un ensemble A de paires de sommets appelées **arcs**.
**Exemples :**

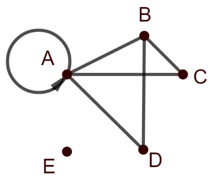



**Définition 2 – Les sommets**

Deux sommets sont dits **adjacents** s'ils sont reliés par une arête ou un arc.
Un sommet est dit **isolé** s'il n'est relié à aucun autre.
**Le degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes ou d'arcs partant de celui-ci. Attention, une boucle compte double car on peut se déplacer dans les deux sens.

**Exemple :**



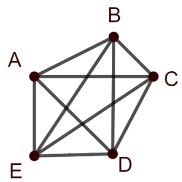

▷ Les sommets $A$ et $B$ sont adjacents alors que $A$ et $E$ ne le sont pas.
▷ $E$ est un sommet isolé.
▷ Les degrés des sommets sont :

| **Sommets** | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Degrés** | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... |

**Définition 3 – Graphe complet**

Un graphe est dit **complet** si tous les sommets sont adjacents entre eux.

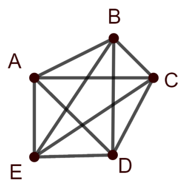
**Exemple :**




**Définition 4 – Chemins et Chaînes**

Dans un graphe non orienté, **une chaîne** de longueur $n$ est une suite de $n+1$ sommets adjacents.
Dans un graphe orienté, **un chemin** de longueur $n$ est une suite de $n+1$ sommets adjacents.
**Un chemin (ou chaîne) est fermé(e)** si le premier sommet de la chaîne (ou chemin) est le même que le dernier sommet.
Un chemin (ou chaîne) est **un cycle** si les arêtes (ou arcs) sont distinct(e)s.

**Exemples :**



▷ $A-B-C-E$ est une chaîne de longueur .......
▷ $A-B-C-B-D-E-B-D-A$ est une chaîne fermée de longueur .......
▷ $A-B-C-D-B-E-A$ est un cycle de longueur .......

**Propriété 1 – Nombre d'arêtes ou d'arcs**

Dans un graphe la somme des degrés est égale au double du nombre d'arêtes ou d'arcs. La somme des degrés est donc un nombre pair.

**Démonstration**

Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité.

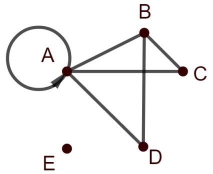
**Propriété 2 – Corollaire**

Dans un graphe il y a un nombre pair de sommets de degré impair.

**Démonstration**

Preuve par l'absurde :
Supposons que le nombre de sommets de degré impair est impair.
Dans ce cas la somme des degrés de ces sommets est un nombre impair. La somme des degrés des autres sommets (tous de degrés pairs) est un nombre pair.
La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair donc la somme des degrés de tous les sommets du graphe est alors un nombre impaire qui est faux.
On en déduit alors que le nombre de sommets de degré impair est pair.

**Exemple :**




▷ Les degrés des sommets sont :

| **Sommets** | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Degrés** | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... |

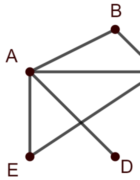
Or $S=$
donc il y a 6 arêtes.

## 1.2. Matrices d'adjacence

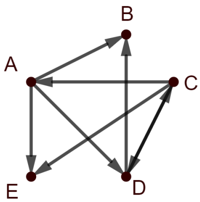
**Définition 5 – Matrice d'adjacence**

On nomme **matrice d'adjacence** $M$ d'un graphe $G(S_i, A_i)_{1\leq i\leq n}$ d'ordre $n$, la matrice carrée de taille $n$ dont les $a_{ij}$ représentent le nombre d'arêtes ou d'arcs reliant les sommets $S_i$ et $S_j$.

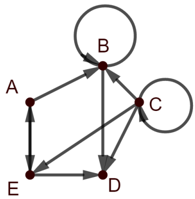
**Exemples :**



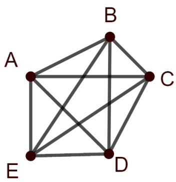

$$\text{alors } M = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$




$$\text{alors } M = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$




$$\text{alors } M = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$




$$\text{alors } M = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

**Propriété 3 – Nombre de chemins de longueur $k$**

On note $G(S_i, A_i)_{1\leq i\leq n}$ un graphe d'ordre $n$ et $M(m_{ij})$ sa matrice d'ajacence de taille $n$.
On note $M^k$ la matrice $M$ exposant $k$, de coefficients $(m'_{ij})$ à l'intersection entre la $i$ ème ligne et la $j$ ième colonne.
$m'_{ij}$ représente alors le nombre de chemins de longueur $k$ pour aller du sommet $S_i$ au sommet $S_j$.

**Démonstration**

On note $G(S_i, A_i)_{1\leq i\leq n}$ un graphe d'ordre $n$ et $M(m_{ij})$ sa matrice d'ajacence de taille $n$.
On note $M^k$ la matrice $M$ exposant $k$, de coefficients $(m'_{ij})$ à l'intersection entre la $i$ ème ligne et la $j$ ième colonne.
Démontrons cette propriété par récurrence :
On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : $m'_{ij}$ représente alors le nombre de chemins de longueur $n$ pour aller du sommet $S_i$ au sommet $S_j$.
**Initialisation** : (Pour $n = 1$)
$M = M^1$ et $m'_{ij} = m_{ij}$ représente le nombre de chemins de longueur 1 pour aller du sommet $S_i$ au sommet $S_j$ donc $\mathbf{P}_1$ est vraie.
**Hérédité** : on suppose que $\mathbf{P}_k$ est vraie pour un rang $k$, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi.
$M^{k+1} = M^k \times M = (m''_{ij})$ avec $m''_{ij} = \sum_{r=1} n m'_{ir} m_{rj}$
Pour $r \in \{1; 2; ...; n\}$ :

- $m'_{ir}$ représente le nombre de chemins de longueur $n$ pour aller de $S_i$ à $S_r$.
- $m_{rj}$ représente le nombre de chemins de longueur 1 pour aller de $S_r$ à $S_j$.

$m'_{ir} m_{rj}$ représente donc le nombre de chemins de longueur $n+1$ pour aller de $S_i$ à $S_j$ mais passant par $S_r$.
$m''_{ij} = \sum_{r=1} n m'_{ir} m_{rj}$ représente donc le nombre de chemins de longueur $n+1$ pour aller de $S_i$ à $S_j$ donc $\mathbf{P}_{n+1}$ est vraie.
**Conclusion** :
$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P}_1 \text{ est vraie}\\ \mathbf{P}_n \text{ implique } \mathbf{P}_{n+1}\end{array}\right\}$ donc pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $m'_{ij}$ représente alors le nombre de chemins de longueur $n$ pour aller du sommet $S_i$ au sommet $S_j$.

## 2. Chaîne de Markov

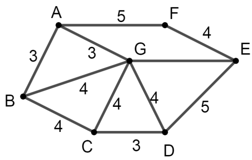
**Andreï Andreïevitch Markov** (1856-1922) Mathématicien russe né à Riazan et mort à Petrograd. Andreï Andreïevitch Markov est connu comme un spécialiste de la théorie des nombres, de la théorie des probabilités et de l'analyse mathématique.

## 2.1. Graphe pondéré

**Définition 6 – Graphe pondéré**

Un graphe $G(S_i, A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est dit pondéré si ses arcs (ou arêtes) sont muni(e)s d'un poids (un nombre positif).
La longueur (ou poids) d'un chemin (d'une chaîne) est la somme des poids des arêtes (ou arcs) qui le (ou la) composent.

**Exemple :**




La chaîne $A - G - C - D - E$ est de longueur ..................................

## 2.2. Chaîne de Markov

**Définition 7 – Processus, états et distributions**

On nomme **processus** une suite $(X_n)$ de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble $E$ (à deux ou trois éléments en classe de terminale) appelés les **états**.
$E$ est donc l'ensemble des états possibles.
Dire que le processus est dans l'état $i$ à l'instant $n$ veut dire que $\{X_n = i\}$ est réalisé.
**La distribution initiale**, noté $\Pi_0$ est la loi de probabilité de la variable aléatoire $X_0$.
**La distribution après *n* transitions**, noté $\Pi_n$ est la loi de probabilité de la variable aléatoire $X_n$.
Les distributions seront représentées par des matrices lignes.

**Exemple :**
Une population vit dans deux villes, une ville $A$ et une ville $B$. En 2021 il y a 60 % de la population dans la ville $A$ et 40 % dans la ville $B$. Chaque année, 10% de la population de la ville $A$ émigre dans la ville $B$ et 20% de la population de la ville $B$ émigre dans la ville $A$.
On note $a_n$ la probabilité pour un individu de cette population d'être dans la ville $A$ l'année $2021 + n$ et $b_n$ la probabilité pour un individu de cette population d'être dans la ville $B$ l'année $2021 + n$.
On note $(X_n)$ la suite de variables aléatoires qui prend la valeur $a_n$ lorsque l'individu choisi est dans la ville $A$ l'année $2021 + n$ et qui prend la valeur $b_n$ lorsque l'individu choisi est dans la ville $B$ l'année $2021 + n$.
$X_n$ définit alors l'**état** de la population l'année $2021 + n$.

Le **processus** d'évolution de la population est donc la suite $(X_n)$.
**La distribution initiale** est $\Pi_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$ représente la liste des proportions l'année 2021.
**La distribution après $n$ transitions** est $\Pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ représente la liste des proportions l'année $2021+n$.

**Définition 8 – Chaîne de Markov**

On nomme chaîne de Markov sur un espace d'états $E$, un processus $(X_n)$ tel que :
► Pour tout état $i$ de $E$ l'événement $\{X_{n+1} = i\}$ ne dépend que de l'état dans lequel était le processus à l'instant $n$ donc "le futur ne dépend seulement que de l'instant présent".
► La probabilité de passer de l'état $i$ à l'état $j$ ne dépend pas de l'instant $n$.

**Exemple :**
Dans l'exemple précédent $(X_n)$ est une chaîne de Markov car :
▷ La répartition de la population entre les villes $A$ ou $B$ l'année $2021+n+1$ ne dépend que de la répartition de l'année précédente $2021+n$.
▷ La probabilité pour un individu de la population de passer de la ville $A$ à la ville $B$ (ou inversement) ne dépend pas de l'année.

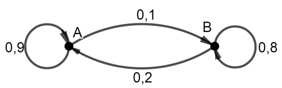
## 2.3. Graphe probabiliste et matrices de transition

**Définition 9 – Graphe probabiliste et matrices de transition**

Une chaîne de Markov peut être représentée de la façon suivante :
► **Un graphe probabiliste** (graphe pondéré associé à la chaîne de Markov) est un graphe dont les sommets sont les états et dont les arêtes sont orientées et pondérées par la probabilité de passer de l'état $i$ à l'état $j$.

► **Une matrice de transition** associée est une matrice carrée dont la taille est le nombre d'état, où le coefficient $p_{ij}$ est égal à la probabilité de passer de l'état $i$ à l'état $j$.

**Exemples :**
Dans l'exemple précédent le graphe probabiliste sera :




et la matrice de transition : $P = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$.

## 2.4. Propriétés des distributions et de la matrice de transition

**Définition 10 – Matrice stochastique**

On nomme matrice stochastique d'ordre $n$ toute matrice carrée de taille $n$ dont la somme des coefficients de chaque ligne est 1.

**Exemple :**

$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$ est stochastique d'ordre .......

**Propriété 4 – Propriétés des coefficients de $P$**

La matrice de transition d'une chaîne de Markov est une matrice stochastique.

**Démonstration**

On note $(X_n)$ une chaîne de Markov de $N$ états $(A_1; A_2; ...; A_n)$.
On note $P = (p_{ij})$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov.
Pour tout $i$ et $j$ dans $\{1, 2, .., N\}$, on a $p_{ij} = P_{(X_n = A_i)}\left(X_{n+1} = A_j\right)$.

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = \sum_{j=1}^{N} P_{(X_n=A_i)}\left(X_{n+1} = A_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \frac{P\left((X_n = A_i) \cap \left(X_{n+1} = A_j\right)\right)}{P\left(X_n = A_i\right)}$$

or $P\left(X_n = A_i\right)$ ne dépend pas de $j$, donc :

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = \frac{1}{P\left(X_n = A_i\right)} \sum_{j=1}^{N} P\left((X_n = A_i) \cap \left(X_{n+1} = A_j\right)\right)$$

La famille $\left(\left\{X_{n+1} = A_j\right\}\right)$ forme une partition de l'univers
donc d'après la formule de probabilité totale :

$$P\left(X_n = A_i\right) = \sum_{j=1}^{N} P\left((X_n = A_i) \cap \left(X_{n+1} = A_j\right)\right) \text{ ainsi :}$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = \frac{P\left(X_n = A_i\right)}{P\left(X_n = A_i\right)} = 1.$$

**Propriété 5 – Propriété des coefficients de $P^n$**

Le coefficient à la ligne $i$ et colonne $j$ de la matrice $P^n$ est la probabilité de passer de l'état $i$ à l'état $j$ en $n$ transitions.

**Démonstration**

Cette propriété est une conséquence de la propriété 2.

**Propriété 6 – Propriété des distributions**

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\Pi_{n+1} = \Pi_n \times P \text{ et } \Pi_n = \Pi_0 \times P^n.$$

**Démonstration**

On note $(X_n)$ une chaîne de Markov de $N$ états $(A_1; A_2; ...; A_n)$.
On note $P = (p_{ij})$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov.
Pour tout $i$ et $j$ dans $\{1, 2, .., N\}$ on a $p_{ij} = P_{(X_n = A_i)}\left(X_{n+1} = A_j\right)$
▶ $\pi_n = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{Nn})$ avec $a_i = P(X_n = A_i)$.
Pour tout $i \in \{1, 2, ..., N\}$, on a :

$$\begin{aligned} a_{i(n+1)} &= P(X_{n+1} = A_i) \\ &\sum_{k=1}^{N} P((X_n = A_k) \cap (X_{n+1} = A_i)) = \sum_{k=1}^{N} P(X_n = A_k) \times P_{(X_n = A_k)}(X_{n+1} = A_i) \\ &= \sum_{k=1}^{N} a_{kn} \times P_{(X_n = A_k)}(X_{n+1} = A_i) \\ &= \sum_{k=1}^{N} a_{kn} \times p_{ki} \end{aligned}$$

donc $\Pi_{n+1} = \Pi_n \times P$.
▶ Pour tout $n \geq 1$, $\Pi_{n+1} = \Pi_n \times P$ alors $(\Pi_n)$ est une suite géométrique de premier terme $\Pi_0$ et de raison $P$. D'après la formule explicite des suites géométriques : $\Pi_n = \Pi_0 \times P^n$.

**Définition 11 – Distribution invariante**

On nomme **distribution invariante** d'une chaîne de Markov de matrice de transition $P$, une distribution telle que $\Pi = \Pi \times P$

**Propriété 7**

Si $(\Pi_n)$ est une suite convergente alors elle converge vers $\Pi$ vérifiant

$$\Pi = \Pi \times P.$$

Si $(\Pi_n)$ admet une limite alors cette limite est une distribution invariante.

**Démonstration**

C'est une conséquence de la propriété 4 du chapitre sur les matrices.

**Méthode 1 – Déterminer une distribution invariante**

**Première méthode :** avec un système traduisant $\Pi = \Pi \times P$
On note $P$ la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,02 & 0,78 & 0,2 \\ 0,15 & 0 & 0,85 \end{pmatrix}$$

et $\Pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ une distribution invariante associé à $P$.
**Remarque :** comme $\Pi$ est une distribution alors on sait que $x + y + z = 1$.
Comme $\Pi$ est une distribution invariante alors $\Pi = \Pi \times P$ donc :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,02 & 0,78 & 0,2 \\ 0,15 & 0 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} 0,9x + 0,2y + 0,15z = x \\ 0,78y = y \\ 0,1x + 0,02y + 0,85z = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

donc la distribution invariante est $\Pi = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}$.

**Deuxième méthode :** avec la convergence de $\Pi_n$. On note $P$ la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Pi_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ la distribution après $n$ transitions.
**Remarque :** comme $\Pi$ est une distribution alors on sait que $x_n + y_n = 1$

On sait que pour tout $n \geq 1$, $\Pi_{n+1} = \Pi_n \times P$ alors

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

On obtient alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7y_n \\ y_{n+1} = 0,9x_n + 0,3y_n \\ x_n + y_n = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7(1 - x_n) = \dots\dots\dots\dots \\ y_{n+1} = 0,9(1 - y_n) + 0,3y_n = \dots\dots\dots\dots \\ x_n + y_n = 1 \end{array} \right.$$

Etudions la suite $(x_n)$ définie par $x_0$ et $x_{n+1} = -0,6x_n + 0,7$

Commençons par chercher le nombre $a$ vérifiant $a = -0,6a + 0,7$

$a = -0,6a + 0,7 \Leftrightarrow 1,6a = 0,7 \Leftrightarrow a = \dfrac{0,7}{1,6} = 0,4375$

On note $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = x_n - 0,4375$.

Montrons que $(u_n)$ est géométrique :

Pour tout $n \geq 1$ :

$u_{n+1} = x_{n+1} - 0,4375 = -0,6x_n + 0,2625 = -0,6(x_n - 0,4375) = -0,6u_n$

$(u_n)$ est alors géométrique de premier terme $u_1 = x_1 - 0,4375$ et de raison $-0,6$.

On sait que pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = (x_1 - 0,4375)(-0,6)^{n-1}$$

Or $x_n = u_n + 0,4375$ donc pour tout $n \geq 1$,

$$x_n = 0,4375 + (x_1 - 0,4375)(-0,6)^{n-1}$$

De plus $-0,6 \in ]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,6)^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0,4375$.

On obtient alors $\begin{pmatrix} 0,4375 & 0,5625 \end{pmatrix}$ comme distribution invariante.

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 0,4375 & 0,5625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4375 & 0,5625 \end{pmatrix}$$

**Troisième méthode :** avec la calculatrice. On sait que $\Pi_n = \Pi_0 \times P^n$ donc on rentre $\Pi_0$ et $P$ dans la calculatrice et on calcule $\Pi_0 \times P^n$ pour un grand $n$.