CHAPITRE 8

GÉNÉRALITÉS SUR LES MATRICES

La considération de tableaux de nombres (matrices) en liaison avec des systèmes linéaires est très ancienne, mais l'introduction par **Cayley** des matrices comme objets de calcul représentant des transformations linéaires date du milieu du XIX^e siècle et leur importance ne sera clairement reconnue qu'au XX^e siècle.

Arthur Cayley (16 août 1821 - 26 janvier 1895) est un mathématicien britannique. Il fait partie des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures. Il est connu pour son théorème de Cayley-Hamilton.
William Rowan Hamilton (4 août 1805 - 2 septembre 1865) est un mathématicien, physicien et astronome irlandais (né et mort à Dublin). Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Il travailla sur l'équation générale du cinquième degré, les opérateurs linéaires, dont il prouve un résultat concernant ces opérateurs dans l'espace des quaternions et qui est un cas spécial du théorème de Cayley-Hamilton.

Les contenus du chapitre
▷ Notion de matrice (tableau de nombres réels). Matrice carrée, matrice colonne, matrice ligne. Opérations. Inverse, puissances d'une matrice carrée.
▷ Transformations géométriques du plan, système linéaires, suites récurrentes.
▷ Exemples de calcul de puissances de matrices carrées d'ordre 2 ou 3.
▷ Suites de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$.
Les capacités attendues du chapitre
▷ Modéliser une situation par une matrice.
▷ Calculer l'inverse, les puissances d'une matrice carrée.
▷ Dans le cadre de la résolution de problèmes, utiliser le calcul matriciel, notamment l'inverse et les puissances d'une matrice carrée, pour résoudre un système linéaire, étudier une suite récurrente linéaire.

Cours

1. Définition

On note n et p des entiers relatifs.

Définition 1 – Les matrices

Un matrice réelle (respectivement complexe) M de dimension (n,p) est un tableau de n lignes et p colonnes contenant des nombres reéls (respectivement complexes).

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note aussi cette matrice $M = (a_{ij})$ où les a_{ij} désignent les coefficients situés à la i-ème ligne et j-ème colonne.

On nomme M_{np} l'ensemble des matrices de dimension (n,p).
Cette année nous aborderons seulement les matrices réelles.

Exemples et vocabulaire :

▷ Si $n \neq p$ $(n=2$ et $p=3)$,

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

▷ Si $n = p$, on dira que c'est **une matrice carrée d'ordre** n :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

▷ Si $n = 1$ on dira que c'est **une matrice ligne** :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

▷ Si $p = 1$ on dira que c'est **une matrice colonne** :

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

▷ Si pour tout i et j dans $\{1;2;...;n\}$, $a_{ij} = 0$ alors on dira que c'est **la matrice nulle** :

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ou } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⚠ Dans les exemples ci-dessous, les matrices sont toujours des matrices carrées :

▷ Si pour tout i dans $\{1;2;...;n\}$, $a_{ii} = 1$ et tous les autres coefficients sont nuls alors on dira que la matrice est **la matrice identité d'ordre** n et on la notera I_n :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

▷ Si pour tout i et j dans $\{1;2;...;n\}$ tels que $i > j$, $a_{ij} = 0$ alors on dira que c'est **une matrice triangulaire supérieure** :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

▷ Si pour tout i et j dans $\{1;2;...;n\}$ tels que $i < j$, $a_{ij} = 0$ alors on dira que c'est **une matrice triangulaire inférieure** :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

▷ Si pour tout i et j dans $\{1;2;...;n\}$ tels que $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ alors on dira que c'est **une matrice diagonale** :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Opérations sur les matrices

2.1. Sommes de deux matrices

Méthode 1 – Somme de deux matrices

Pour additionner deux matrices il faut qu'elles aient les mêmes dimensions.
La somme des matrices A et B notée $A + B$ est la matrice obtenue en additionnant deux à deux les coefficients de A et de B qui sont à la même ligne et colonne.

Exemples :

▷ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

▷ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$

2.2. Différence de deux matrices

Méthode 2 – Différence de deux matrices

Pour soustraire deux matrices il faut qu'elles aient les mêmes dimensions.
La différence des matrices A et B notée $A-B$ est la matrice obtenue en soustrayant deux à deux les coefficients de A et de B qui sont à la même ligne et colonne.

Exemples :

▷ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

▷ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$

2.3. Egalité de deux matrices

Méthode 3

Deux matrices de même dimension A et B sont égales si $A-B=0$ (la matrice nulle) et donc si tous les coefficients des deux matrices sont égaux.

Contre-exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -10 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -10 & 1 & -3 \\ -3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ sont différentes.

2.4. Produit d'une matrice par un réel

Méthode 4

Le produit d'une matrice A par un réel k noté kA est la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par k.

Exemples :

▷ Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -10 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ alors $2A =$

▷ Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 5 & 0 & 10 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\frac{1}{2}A =$

▷ Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 5 & 0 & 10 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ alors $-A =$

2.5. Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Méthode 5 – Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Pour pouvoir faire cette multiplication, il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la seconde.
La produit d'une matrice ligne $A = (a_{1j})$ par une matrice colonne $B = (b_{i1})$ est le nombre réel c tel que $c = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \times b_{k1}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \dots + a_{1n} \times b_{n1}$$

On retrouve cette opération dans **le produit scalaire** de deux vecteurs.

Exemple :

▷ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} =$

2.6. Produit d'une matrice ligne par une matrice

Méthode 6 – Produit d'une matrice ligne par une matrice

Pour pouvoir faire cette multiplication, il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la seconde.

La produit d'une matrice ligne $A = (a_{1i})$ par une matrice $B = (b_{ij})$ est une matrice ligne $C = (c_{1j})$ obtenue en multipliant la matrice ligne A par toutes les colonnes de la matrice B. On obtient alors pour tout $j \in \{, 2, \dots, n\}$,

$$c_{1j} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \times b_{kj}$$

Exemple :

▷ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$

2.7. Produit de deux matrices

Méthode 7 – Produit de deux matrices

Pour pouvoir faire cette multiplication, il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la seconde.

Le produit d'une matrice de dimension (n,p) $A=(a_{ij})$ par une matrice de dimension (p,m) $B=(b_{ij})$ est une matrice de dimension (n,m) $C=(c_{ij})$ obtenue en multipliant les lignes de la matrice A par toutes les colonnes de la matrice B. On obtient alors pour tout $i \in \{,2,\dots,n\}$ et $j \in \{,2,\dots,m\}$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times b_{kj}.$$

Exemples :

▷ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

▷ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} =$

⚠ La multiplication des matrices n'est pas commutative.

$$A \times B \text{ n'est pas toujours égale à } B \times A.$$

Exemples :

▷ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$

▷ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

Remarque : La matrice identité I_n commute avec toutes les matrices carrées de dimension (n,n) et donc pour toute matrice $A \in M_{nn}$, on a :

$$AI_n = I_n A = A.$$

Exemple :

▷ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

⚠ Si le produit de deux matrices A et B est nul alors cela n'implique pas que l'une des deux matrices soit nulle. La règle des produits nuls ne fonctionne pas dans l'espace des matrices.

Exemples :

▷ Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A \times B =$

▷ Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A \times B =$

2.8. Transposée de matrice

Définition 2 – Transposée de matrice

On note A la matrice de dimensions (n, p) telle que $A = (a_{ij})$.
On nomme "transposée de A" la matrice, notée ${}^tA$ (ou A^t), de dimensions (p, n) telle que :

$${}^tA = (a_{ji})$$

${}^tA$ est en fait la matrice obtenue en permutant lignes et colonnes de A. Les lignes de A deviennent les colonnes de ${}^tA$.

Exemples :

▷ Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA =$

▷ Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors ${}^tB =$

2.9. Puissance d'une matrice

Méthode 8

► Si A est une matrice carrée de taille n et $n = 0$ alors,

$$A^0 = I_n$$

► Si A est une matrice carrée de taille n et $n \neq 0$ alors,

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ facteurs}}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3 =$$

⚠ Pour calculer la puissance n d'une matrice A il ne faut pas élever les cœfficients de A à la puissance n. Les seules matrices pour lesquelles cela fonctionne sont les matrices diagonales.

Propriété 1 – Puissance d'une matrice diagonale

Si $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_p \end{pmatrix}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^n & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_p^n \end{pmatrix}$

Démonstration

Nous allons démontrer cette propriété par récurrence.

On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : "$A^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^n & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_p^n \end{pmatrix}$"

Initialisation : (Pour $n = 0$)

$A^0 =$ et $\begin{pmatrix} \alpha_1^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^0 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_p^0 \end{pmatrix} =$

donc $\mathbf{P}_0$ est vraie.

Hérédité : on suppose que $\mathbf{P}_k$ est vraie pour un rang k, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi.

$A^{k+1} = A^k A =$

donc $\mathbf{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion :

$\left.\begin{array}{l} \mathbf{P}_0 \text{ est vraie} \\ \mathbf{P}_k \text{ implique } \mathbf{P}_{k+1} \end{array}\right\}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^n & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_p^n \end{pmatrix}$.

3. Propriétés des opérations sur les matrices

Propriété 2 – Règles sur la somme des matrices

Soit A, B et C trois matrices de même dimension et $k \in \mathbb{R}$:
- ► L'addition est commutative : $A+B=B+A$
- ► L'addition est associative : $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$
- ► Le produit par un réel est distributif : $k(A+B)=kA+kB$
- ► 0 est l'élément neutre de l'addition : $A+0=A$

Propriété 3 – Règles sur le produit des matrices

- ► I_n est l'élément neutre du produit par une matrice carrée : $A \times I_n = A$
- ► La multiplication est associative : $(AB)C=A(BC)=ABC$
- ► La multiplication est distributive : $A(B+C)=AB+AC$ et $(A+B)C=AC+BC$
- ► La multiplication n'est pas commutative.

Exemples :

▷ Si A et B sont des matrices carrées de taille n telles que $AB \neq BA$ (ce qui est souvent le cas), alors,

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2.$$

On ne peut pas aller plus loin car $AB \neq BA$.

⚠ On ne peut donc pas utiliser les identités remarquables dans l'espace des matrices.

▷ On peut factoriser des expressions, mais attention $A = A \times I_n$:
$A^2-2A=A\times A-2\times A\times I_n=A(A-2I_n)$.

⚠ On ne peut pas factoriser $BA-AC$ mais on peut factoriser $BA-CA=(B-C)A$.

4. Matrices inversibles

Définition 3 – Matrice inversible

Soit $n \in \mathbb{N}$,
on dit qu'une matrice carrée A de taille n est inversible s'il existe une matrice carrée B de taille n telle que

$$A\times B=B\times A=I_n$$

On dira alors que B est l'inverse de A et on notera $B=A^{-1}$.

Exemples :

$\triangleright \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} =$

donc $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Méthode 9 – Comment déterminer l'inverse d'une matrice ?

Première méthode :

$\triangleright$ Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculons B^{-1} :

on cherche donc une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_2$.

On a donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ -a+c=0 \\ -b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ b=-d \\ c=a \\ -b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+a=1 \\ b=-d \\ c=a \\ d+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ c=\dfrac{1}{2} \\ d=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

On a donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Deuxième méthode : on cherche l'inverse de la matrice A.
On place la matrice A à côté de la matrice identité à droite.

On fait des combinaisons linéaires de ligne pour obtenir l'identité à gauche et une matrice autre que l'identité à droite.
Exemples :

$\triangleright$ Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculons B^{-1}

$det(B) = ad - bc = 1 \times 1 - 1 \times (-1) = 2 \neq 0$ donc B est inversible.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Il reste à diviser par deux pour obtenir :

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\triangleright$ On note $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On souhaite calculer M^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Il reste à diviser par deux pour obtenir :

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Troisième méthode</u> : on utilise un polynôme annulateur :

Exemple :

On note $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 + 2A + 2I_2 = 0$ puis en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 10 \\ -20 & 14 \end{pmatrix}$$

donc

$$A^2 + 2A + 2I_2 = \begin{pmatrix} -14 & 10 \\ -20 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & -10 \\ 20 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a donc bien :

$$A^2 + 2A + 2I_2 = 0$$

de plus,

$$\begin{aligned} A^2+2A+2I_2=0 &\Leftrightarrow A^2+2A=-2I_2 \\ &\Leftrightarrow A(A+2I_2)=(A+2I_2)A=-2I_2 \\ &\Leftrightarrow A\left(-\frac{1}{2}(A+2I_2)\right)=\left(-\frac{1}{2}(A+2I_2)\right)A=I_2 \\ &\Leftrightarrow AB=BA=I_2 \text{ avec } B=-\frac{1}{2}(A+2I_2) \end{aligned}$$

donc A est inversible et son inverse est

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}(A+2I_2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Propriété 4 – Inverse des matrices carrées de taille 2

Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on note $det(A)=ad-bc$.

Si $det(A)\neq 0$ alors A est inversible et

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration

Première méthode : on peut simplement vérifier que cette matrice vérifie les conditions.

▷ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\times\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=$

▷ $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=$

donc A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Deuxième méthode : on suppose que $det(A)=ad-bc\neq 0$ alors :

► Si $a\neq 0$ alors

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow aL_2-cL_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow (ad-bc)L_1-bL_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} (ad-bc)a & 0 & ad & -ba \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$

or $ad-bc\neq 0$ donc on peut diviser par $ad-bc$ la deuxième ligne et par $(ad-bc)a$, la première ligne. On obtient alors que :

$$A^{-1}=\frac{1}{\text{ad-bc}}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

► Si $a=0$ et $-bc\neq 0$ alors

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0\\ c & d & 0 & 1\end{array}\right)\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1\\ 0 & b & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow bL_1-dL_2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc} bc & 0 & -d & b\\ 0 & b & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow -L_1\\ L_2\leftarrow -cL_2}}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc} -bc & 0 & d & -b\\ 0 & -bc & -c & 0\end{array}\right)$$

or $-bc\neq 0$ donc on peut diviser par $-bc$ et on obtient :

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

Exemple :

▷ L'inverse de $\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ est $A^{-1}=$

Méthode 10 – Calculer la puissance d'une matrice

Première méthode : conjecture et démonstration :
Exemple :

▷ On souhaite trouver A^n pour $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Puissances successives de A :
$A^0=I_3$
$A^1=3^0\times A$
$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}=3\times A$

► $A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9\\ 9 & 9 & 9\\ 9 & 9 & 9\end{pmatrix}=3^2\times A.$

Il semble donc que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$A^n=3^{n-1}\times A.$$

2) Démonstration de la formule précédente :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ la propriété "$A^n = 3^{n-1} \times A$"
Initialisation :
► $A^1 = A$ et $3^{1-1} \times A = 1 \times A = A$
Donc la propriété est vraie au rang 1 et $P(1)$ est vraie.
Hérédité :
On suppose que pour un rang $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété est vraie et donc que $P(k)$ est vraie. Démontrons qu'alors la propriété est vraie aussi au rang suivant et donc que $P(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \times A \\ &= 3^{k-1} \times A \times A \\ &= 3^{k-1} \times A^2 \\ &= 3^{k-1} \times 3 \times A \\ &= 3^k \times A \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $k+1$ et $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :
$$\left.\begin{array}{l} P(1) \text{ est vraie} \\ P(k) \Rightarrow P(k+1) \end{array}\right\} \text{donc pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = 3^{n-1} \times A$$

<u>Deuxième méthode</u> : en utilisant une matrice diagonale :
Exemple :
On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer B^{-1} puis montrer que $A = B\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}B^{-1}$ et enfin en déduire une expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Calculons B^{-1}
$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 \neq 0$ donc B est inversible.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

donc

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

► Montrons que $A = B\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}B^{-1}$

$$\begin{aligned} B\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}B^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

► Déterminons une expression pour tout $n \in \mathbb{N}$, de A^n :
On note $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme $A = BDB^{-1}$ alors démontrons par récurrence que $A^n = BD^nB^{-1}$.
On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : $A^n = BD^nB^{-1}$.
Initialisation : (Pour $n = 0$)
$A^0 = I_n$ et $BD^0B^{-1} = BI_nB^{-1} = BB^{-1} = I_n$ donc $\mathbf{P}_0$ est vraie.
Hérédité : on suppose que $\mathbf{P}_k$ est vraie pour un rang k, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi.
$A^{k+1} = A^k \times A = BD^kB^{-1} \times BD^1B^{-1} = BD^k(B^{-1}B)DB^{-1} = BD^kDB^{-1} = BD^{k+1}B^{-1}$
donc $\mathbf{P}_{k+1}$ est vraie.
Conclusion :

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{P}_0 \text{ est vraie} \\ \mathbf{P}_k \text{ implique } \mathbf{P}_{k+1} \end{array}\right\} \text{donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = BD^nB^{-1}$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= B\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}B^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -3^n \\ 2^n & -3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2 \times 3^n - 2^{n+1} \\ 2^n - 3^n & 2 \times 3^n - 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2 \times 3^n - 2^{n+1} \\ 2^n - 3^n & 2 \times 3^n - 2^n \end{pmatrix}$$

5. Système d'équations

Méthode 11 – Résolution d'un système

On souhaite résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} -x+y+z=-2 \\ x-y+z=-4 \\ x+y-z=0 \end{array}\right.$$

On remarque que $\begin{pmatrix} -x & y & z \\ x & -y & z \\ x & y & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

donc $\left\{\begin{array}{l} -x+y+z=-2 \\ x-y+z=-4 \\ x+y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

On passe d'un système à une équation matricielle. On va nommer les matrices ci-dessus A, X et B donc :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc à résoudre l'équation,

$$AX = B.$$

Si A est inversible alors on peut multiplier à gauche dans chaque membre par A^{-1} et obtenir :

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$$

Pour trouver X il faut donc calculer A^{-1} puis $A^{-1} \times B$
On a calculé A^{-1} dans les méthodes précédentes.

$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Conclusion : $x=-2$, $y=-1$ et $z=-3$.

⚠ Si A n'est pas inversible alors le système correspondant possède soit une infinité de solutions, soit n'a pas de solutions.

6. Suites de matrices

Propriété 5 – Suite arithmético-géométrique de matrices

On considère une suite (U_n) de matrices telle que $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout entier naturel n avec U_0 donné.
► S'il existe une matrice X telle que $AX + B = X$ alors la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - X$ vérifie : $V_{n+1} = AV_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A^n(U_0 - X) + X.$$

► Si (U_n) est une suite convergente, alors elle converge vers une matrice U vérifiant :

$$AU + B = U$$

Démonstration

On considère une suite (U_n) de matrices telle que $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout entier naturel n.
► S'il existe une matrice X telle que $AX + B = X$ alors on utilise la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - X$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors :

$V_{n+1} =$

(V_n) est donc une suite géométrique de raison A et de premier terme $V_0 = \ldots\ldots\ldots.$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n \times V_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots.$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

► Soit (U_n) une suite convergente vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$. On note U sa limite.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = U$ alors on a :

$U = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
donc on a bien $U = AU + B$

Exemple :

▷ On note (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

On a donc $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \\ u_{n+1} = u_{n+1} + 0u_n \end{array} \right.$ et ainsi $X_{n+1} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \times X_n$

On a donc une suite (X_n) de matrices colonnes telle que $X_{n+1} = A \times X_n$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Or (X_n) est géométrique de raison A et de premier terme X_0 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $X_n = A^n \times X_0$.

Il restera à calculer A^n pour trouver X_n puis l'expression explicite de u_n en fonction de n.

7. Matrices de transformations

On note $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, $M(x; y)$ un point de ce plan et $M'(x'; y')$ l'image de M par une transformation (symétrie, translation, rotation ou homothétie).

On cherche ici l'expression d'une matrice A telle que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Propriété 6 – Matrice de symétrie centrale

▷ Symétrie de centre O centre du repère :

La matrice de la transformation est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $X' = AX$.

▷ Symétrie de centre I :

La matrice de la transformation est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et

$X' = AX + B$ ou $B = \begin{pmatrix} 2x_I \\ 2y_I \end{pmatrix}$.

Démonstration

Propriété 7 – Matrice de translation

Translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

La matrice de la transformation est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X' = AX + B$ ou $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Démonstration

Propriété 8 – Matrice de rotation

Pour une rotation de centre $O(0;0)$ et d'angle θ :
La matrice de la transformation est $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $X' = AX$.

Démonstration

Propriété 9 – Matrice d'une homothétie

Pour une homothétie de centre $O(0;0)$ et de rapport λ :
La matrice de la transformation est $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $X' = AX$

Démonstration