Chapitre 4

Equations polynomiales

La méthode de résolution des équations du second degré était déjà connue des Sumériens, aux environs de 2000 av. J.-C. et des Babyloniens vers 1700 av. J.-C. Les mathématiciens italiens **Niccolò Tartaglia** (1499-1557) et **Jérôme Cardan** (1501-1576) découvrirent des formules similaires, en utilisant des racines carrées et des racines cubiques, pour résoudre des équations du troisième et du quatrième degrés (équations qui font intervenir les puissances trois et quatre de l'inconnue).
Ludovico Ferrari (1522-1565), élève de Cardan, aura raison du quatrième degré en 1540.
Les mathématiciens cherchèrent sans succès, durant plusieurs siècles, des formules analogues pour les équations du cinquième degré.
Pour sa thèse, Gauss démontre le théorème fondamental de l'algèbre donnant la quantité de solutions possibles des équations algébriques. Les mathématiciens **Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel** (1802-1829) et **Évariste Galois** (1811-1832) démontrèrent que ces formules n'existaient pas. Leurs travaux donnèrent naissance à une branche importante de l'algèbre moderne : la théorie des groupes et la théorie de Galois, qui étudient la symétrie d'une manière générale, et en particulier celle des racines des polynômes. Evariste Galois à 22 ans a écrit sa théorie en une nuit, le lendemain matin il fit un duel où il trouva la mort.

Les contenus du chapitre

- Solutions complexes d'une équation du second degré à coefficients réels.
- Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$.
- Si P est un polynôme et $P(a) = 0$, factorisation de P par $z - a$.
- Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Les capacités attendues du chapitre

- Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels.
- Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.
- Factoriser un polynôme dont une racine est connue.

COURS

1. Polynôme, racines, factorisation

Dans ce chapitre, on note $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1 – Polynôme de degré n

Un polynôme de degré n est un expression algébrique de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où a_n, a_{n-1}, ..., a_1 et a_0 sont des complexes et $a_n \neq 0$.

Exemples :
▷ $P(x) = 2$ est un polynôme de degré ....
▷ $P(x) = 3x - 5$ est un polynôme de degré ....
▷ $P(x) = 2x^2 - 4x + 5$ est un polynôme de degré ....
▷ $P(x) = 5x^4 - 5x^2 + 3$ est un polynôme de degré ....

Propriété 1 – Polynômes nuls (Admis)

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \ldots = a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$$

Définition 2 – Racines d'un polynôme

Une racine a d'un polynôme P est un nombre réel ou complexe tel que $P(a) = 0$.

Exemple :
▷ $3i$ est une racine de $P(x) = x^2 + 9$ car $P(3i) =$ ....

Propriété 2 – Factorisation de $P(x) = x^n - a^n$ par $x - a$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que :

$$x^n - a^n = (x-a)Q(x)$$

Remarque :

$$Q(x) = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}a^k$$

Démonstration

Exemples :

▷ $P(x) = x^2 - 3^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

▷ $P(x) = x^3 - 4^3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Méthode 1 – Factorisation de $x^n - a^n$

Exemple : on souhaite factoriser $x^4 - 81$

<u>Première méthode</u> : identification

Remarquons que $x^4 - 81 = x^4 - 3^4$.

On cherche donc un polynôme $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tel que $a = 1$ et

$$x^4 - 81 = (x-3)Q(x)$$

$$\begin{aligned}(x-3)(ax^3 + bx^2 + cx + d) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 3ax^3 - 3bx^2 - 3cx - 3d \\ &= ax^4 + (b-3a)x^3 + (c-3b)x^2 + (d-3c)x - 3d\end{aligned}$$

Par identification avec $x^4 - 81$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b - 3a = 0 \\ c - 3b = 0 \\ d - 3c = 0 \\ -3d = -81 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 9 \\ d = 27 \\ d = 27 \end{array}\right.$$

On a donc :

$$x^4 - 81 = (x-3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$$

<u>Deuxième méthode</u> : division euclidienne

On effectue une division euclidienne de $x^4 - 81$ par $x - 3$.

$$\begin{array}{lr|l} x^4 & \qquad\qquad -81 & x-3 \\ \hline & & \\ & & \end{array}$$

On a donc, $x^4 - 81 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

<u>Troisième méthode</u> : formule

On utilise la formule,

$$x^n - a^n = (x-a)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} a^k$$

On a donc,

$$x^4 - 81 = x^4 - 3^4 = (x-3)\sum_{k=0}^{3} x^{3-k} 3^k = (x-3)(x^3 + 3x^2 + 3^2 x + 3^3)$$

On a donc,

$$x^4 - 81 = (x-3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$$

Propriété 3 – Factorisation de $P(x)$ par $x - a$

P est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1, $P(a) = 0$ est équivalent à "P se factorise par $x - a$".

Démonstration

Exemples :
▷ $P(x) = x^2 - 5x + 6$ admet $a = 3$ comme racine et $P(x) = (x-3)(x-2)$

▷ $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ admet $a = 2i$ comme racine
et $P(x) = (x-2i)(x+2i)(x-3)$

Méthode 2 – Factorisation d'un polynôme par $x - a$

On souhaite factoriser $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 26x - 8$ par $x - 4$.
<u>Première méthode</u> : identification
On cherche un polynôme Q de degré 2 tel que $P(x) = (x-4)Q(x)$.
On cherche donc un polynôme de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

$(x-4)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx-4ax^2-4bx-4c = ax^3+(b-4a)x^2+(c-4b)x-4c$

Par identification avec $3x^3 - 5x^2 - 26x - 8$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b - 4a = -5 \\ c - 4b = -26 \\ -4c = -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 7 \\ c = 2 \\ c = 2 \end{array}\right.$$

On a donc :

$$3x^3 - 5x^2 - 26x - 8 = (x-4)(3x^2 + 7x + 2).$$

<u>Deuxième méthode</u> : division euclidienne
On effectue une division euclidienne de $3x^3 - 5x^2 - 26x - 8$ par $x - 4$.

$$\begin{array}{cccc|c} 3x^3 & -5x^2 & -26x & -8 & x-4 \\ \hline & & & & \\ & & & & \end{array}$$

On a donc :

$$3x^3 - 5x^2 - 26x - 8 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Propriété 4 – Nombre de racines d'un polynôme

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Démonstration

Exemples :
▷ Un polynôme de degré 1 admet 1 ou 0 racine.
▷ Un polynôme de degré 2 admet 2 ou 1 ou 0 racines.
▷ Un polynôme de degré 3 admet 3 ou 2 ou 1 ou 0 racines.

2. Equation du premier degré à coefficients réels ou complexes

Propriété 5 – Solution d'une équation du premier degré

On note $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ alors $P(x) = ax + b$ admet pour racine $-\dfrac{b}{a}$

Démonstration

Exemples :

▷ $P(x) = 2x + 4$ admet .... comme racine.

▷ $P(x) = ix - 5$ admet .... comme racine.

▷ $P(x) = (1+i)x - 4$ admet .... comme racine.

3. Equation du second degré à coefficients réels ou complexes

Propriété 6 – Solution d'une équation du second degré à coefficients réels

On note $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ on note $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

► Si $\Delta > 0$ alors P admet deux racines réelles distincts :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

► Si $\Delta = 0$ alors P admet une seule racine réelle : $x = -\dfrac{b}{2a}$.

► Si $\Delta < 0$ alors P admet deux racines complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Démonstration

Exemples :

▷ $P(x) = x^2 - 5x + 6$

▷ $P(x) = x^2 - 4x + 4$

▷ $P(x) = x^2 - 2x + 2$

Méthode 3 – Trouver une racine connaissant l'autre

Petit rappel sur le second degré : si $P(x) = ax^2 + bx + c$ et si les deux racines sont x_1 et x_2 alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Autre rappel : si x_1 est une solution complexe alors $x_2 = \overline{x_1}$.

Si on connaît une des deux racines, alors on peut trouver l'autre.
Exemples :
▷ $P(x) = 4x^2 - 13x + 3$. On sait que $x_1 = 3$ est une des racines alors $3 + x_2 = \dfrac{13}{4} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{1}{4}$

▷ $P(x) = x^2 - 6x + 25$. On sait que $x_1 = 3 - 4i$ est une des racines alors $x_2 = \overline{x_1} = 3 + 4i$

4. Équation polynomiale de degré supérieur à 2

On suppose que l'on connaît une des racines ou qu'une racine soit évidente comme par exemple 0, 1, -1, 2, -2, i ou $-i$.

Méthode 4 – Méthodes de résolution

On commence par factoriser le polynôme par $x - a$ puis on étudie le nouveau polynôme obtenu.
Exemple :
$P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 5$

► **Étape 1** : on commence par trouver une racine a du polynôme :

Ne connaissant pas de racine, on va en chercher une évidente si elle existe :
▷ $P(0) = 5 \neq 0$
▷ $P(1) = 1 - 2 + 2 + 5 = 6 \neq 0$
▷ $P(-1) = -1 - 2 - 2 + 5 = 0$
donc -1 est une racine de P

► **Ètape 2** : on factorise P par $x - a$:

On va maintenant chercher un polynôme Q tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$
Première méthode : par identification.
On cherche un polynôme Q de degré 2 car P est de degré 3 et $x + 1$ de degré 1.
On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(X) &= (x+1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (b+a)x^2 + (b+c)x + c \end{aligned}$$

On identifie le résultat à $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 5$ et on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = -2 \\ b + c = 2 \\ c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 5 \\ c = 5 \end{cases}$$

donc $P(x) = (x+1)(x^2 - 3x + 5)$

Deuxième méthode : par division euclidienne.

x^3	$-2x^2$	$+2x$	$+5$	$x+1$

donc $P(x) = (x+1)(x^2 - 3x + 5)$

▶ **Étape 3** : on cherche les autres racines possibles :
Comme $P(x) = (x+1)(x^2 - 3x + 5)$, il reste à trouver les racines de $x^2 - 3x + 5$:
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9 - 20 = -11 = (i\sqrt{11})^2 < 0$
Il y a donc deux racines complexes conjuguées :
$x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{3 + i\sqrt{11}}{2}$
et
$x_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{3 - i\sqrt{11}}{2}$

donc P admet trois racines -1, $\dfrac{3 + i\sqrt{11}}{2}$ et $\dfrac{3 - i\sqrt{11}}{2}$.