Chapitre 3

Nombre complexe (partie 3)

Les contenus du chapitre

▷ Exponentielle imaginaire, notation $e^{i\theta}$. Relation fonctionnelle. Forme exponentielle d'un nombre complexe.

▷ Formules d'Euler.

▷ Formules de Moivre.

▷ Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Stabilité par produit et passage à l'inverse.

▷ Racines $\mathrm{n}^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité. Représentation géométrique. Cas particulier pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme trigonométrique ou exponentielle et inversement.

▷ Effectuer des calculs sur les nombres complexes en choisissant une forme adaptée en particulier dans le cadre de la résolution de problème.

▷ Utiliser la forme d'Euler et de Moivre pour transformer des expressions trigonométriques, dans des contextes divers (intégration, suites, etc.), calculer des puissances de nombres complexes.

▷ Utiliser les racines de l'unité dans l'étude de configurations liées aux polygones réguliers.

Cours

1. Ecriture exponentielle des nombres complexes

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : \theta \mapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Propriété 1 – Propriétés de f

► Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$,

$$f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$$

► $f(0) = 1$

► Si on admet que les règles de calcul des dérivées sont les mêmes que celles des fonctions réelles, alors,

$$f'(\theta) = i f(\theta)$$

Démonstration

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : \theta \mapsto e^{i\theta}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Propriété 2 – Propriétés de g

► Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$,

$$g(\theta + \theta') = g(\theta) \times g(\theta')$$

► $g(0) = 1$.

► Si on admet que les règles de calcul des dérivées sont les mêmes que celles des fonctions réelles, alors,

$$g'(\theta) = i g(\theta)$$

Démonstration

On peut donc conclure des deux propriétés précédentes que $f(\theta) = g(\theta)$ et donc que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Définition 1 – Ecriture exponentielle

Si z est un complexe non nul, d'argument θ alors z peut s'écrire sous forme exponentielle :

$$z = |z| e^{i\theta}$$

Exemples :

▷ $1 + i =$ ....

▷ $1 =$ ....

▷ $i =$ ....

▷ $-1 =$ .... et on a donc $e^{i\pi} + 1 =$ ....

▷ $-i = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

⚠ Le nombre complexe $e^{i\theta}$ est de module 1 et d'argument θ. Son point dans le plan se situe sur le cercle trigonométrique. Autrement dit, le cercle trigonométrique est l'ensemble des points du plan d'affixe $e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

⚠ Si $z = a + ib$ est un complexe non nul avec $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$ alors les différentes écritures de z sont :

$$z = a + ib = \rho\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) = \rho e^{i\theta}.$$

1.1. Formules remarquables

Propriété 3 – Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Démonstration

Propriété 4 – Formules d'addition

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta + \theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')$$

$$\cos(\theta - \theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta')$$

$$\sin(\theta + \theta') = \cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')$$

$$\sin(\theta - \theta') = -\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')$$

Démonstration

Propriété 5 – Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

$$\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

Démonstration

2. L'ensemble $\mathbb{U}$

Définition 2 – Nombres complexes de module 1

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\right\}$$

Exemple :

▷ $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{U}$ car $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

Propriété 6 – Ecriture exponentielle

$$\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta} \text{ tel que } \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

Démonstration

Propriété 7 – Stabilité

Si $z \in \mathbb{U}$ et $z' \in \mathbb{U}$ alors $zz' \in \mathbb{U}$, $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$ et $\frac{z}{z'} \in \mathbb{U}$.

Démonstration

Propriété 8 – Géométrie

$z = x + iy \in \mathbb{U}$ est équivalent à $M(x; y)$ appartient au cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1(Cercle trigonométrique).

Démonstration

3. L'ensemble $\mathbb{U}_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition 3 – $\mathbb{U}_n$

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité donc :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tels que } z^n = 1 \right\}.$$

Exemples :

▷ $z^0 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}^*$ donc $\mathbb{U}_0 = \mathbb{C}^*$.

▷ $z^1 = 1 \Leftrightarrow z = 1$ donc $\mathbb{U}_1 = \{1\}$.

▷ $z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$ donc $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$.

Propriété 9 – Résolution de $z^n = 1$

On note $z \in \mathbb{C}$ d'écriture exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$.

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n}, \ k \in \{0; 1; ...; n-1\} \end{array} \right.$$

Démonstration

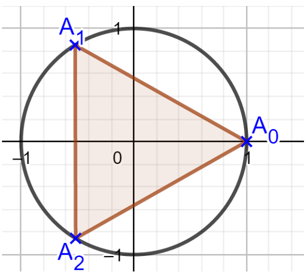
Exemples :

$\triangleright$ $\mathbb{U}_3$

$z^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3}, \ k \in \{0;1;2\} \end{cases}$

On obtient donc 3 nombres complexes : $z_0 = e^{i0}$, $z_1 = e^{2i\pi/3}$ et $z_2 = e^{4i\pi/3}$

$$\mathbb{U}_3 = \left\{e^{i0}; e^{2i\pi/3}; e^{4i\pi/3}\right\}$$

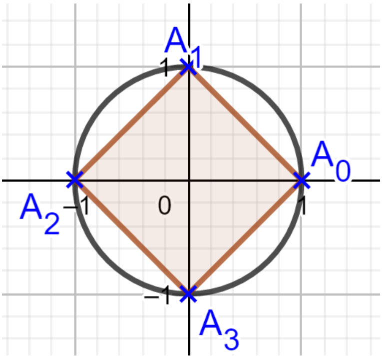


$\triangleright$ $\mathbb{U}_4$

$z^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{4}, \ k \in \{0;1;2;3\} \end{cases}$

On obtient donc 4 nombres complexes : $z_0 = e^{i0}$, $z_1 = e^{i\pi/2}$, $z_2 = e^{i\pi}$ et $z_3 = e^{3i\pi/2}$

$$\mathbb{U}_4 = \left\{e^{i0}; e^{i\pi/2}; e^{i\pi}; e^{3i\pi/2}\right\}$$


A1
1
A0
A2
−1
0
1
−1
A3