CHAPITRE 2

NOMBRES COMPLEXES (PARTIE 2)

Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ peut être vu comme l'ensemble des nombres complexes. Cette observation prend tout son sens lorsqu'on réalise que de nombreuses notions de géométrie plane s'interprètent en termes de nombres complexes.
On peut ainsi utiliser le calcul dans $\mathbb{C}$ pour résoudre de nombreuses questions de géométrie et de trigonométrie. Une bonne maîtrise des raisonnements et techniques fondés sur ce principe est un des objectifs principaux de cette partie.
Les racines n-ièmes de l'unité fournissent par ailleurs un pont intéressant entre équations polynomiales et géométrie.
L'étude des fractales sont apparues au XIX^e et XX^e siècles avec **Gaston Julia** (1893-1978) et **Benoît Mandelbrot** (1924-2010).

Les contenus du chapitre

▷ Image d'un nombre complexe. Image du conjugué. Affixe d'un point et d'un vecteur.
▷ Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique.
▷ Relation $|z^2| = z\overline{z}$. Module d'un produit et d'un inverse.
▷ Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse.
▷ Arguments d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique.
▷ Formules d'additions et de duplications à partir du produit scalaire.
▷ Interprétation géométrique du module et d'un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$.
▷ Forme trigonométrique.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe.
▷ Représenter un nombre complexe par un point. Déterminer l'affixe d'un point.
▷ Passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme trigonométrique et inversement.
▷ Effectuer des calculs sur des nombres complexes en utilisant la formule adaptée.
▷ Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser les nombres complexes pour étudier des configurations du plan : démontrer un alignement, une orthogonalité, calculer des longueurs, des angles, déterminer des ensembles de points.

Cours

1. Correspondance entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$

Nombres complexes $\mathbb{C} = \{x + iy \text{ tel que } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
Plan euclidien $\mathbb{R}^2 = \{M(x\,;\,y) \text{ tel que } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

⚠ On ne note pas $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs du repère car i est utilisé dans l'écriture des nombres complexes.

Définition 1 – Affixe d'un point de $\mathbb{R}^2$

À chaque couple $(x\,;\,y)$ de $\mathbb{R}^2$ on lui associe un point $M(x\,;\,y)$ dans le plan euclidien et donc on peut aussi lui associer un nombre complexe $z_M = x + iy$ dans $\mathbb{C}$. Ce nombre complexe, $z_M = x + iy$, se nomme **l'affixe** du point M.

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ x + iy &\longmapsto M(z_M) \text{ avec } z_M = x + iy \end{aligned}$$

Exemples :

▷ Le nombre complexe $z = 3 + 2i$ est l'affixe du point $A(\ldots\ldots\,;\,\ldots\ldots)$.
▷ Le nombre complexe $z = 1$ est l'affixe du point $B(\ldots\ldots\,;\,\ldots\ldots)$.
▷ Le nombre complexe $z = i$ est l'affixe du point $A(\ldots\ldots\,;\,\ldots\ldots)$.
▷ Le nombre complexe $z = 1 + i$ est l'affixe du point $A(\ldots\ldots\,;\,\ldots\ldots)$.

Définition 2 – Affixe d'un point et d'un vecteur

▷ Si M a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ alors l'affixe de M est $z_M = x + iy$ et l'affixe de $\overrightarrow{OM}$ est $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M = x + iy$.

▷ Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors l'affixe de $\vec{u}$ est $z_{\vec{u}} = x + iy$.

Propriété 1 – Affixe de $\overrightarrow{AB}$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

$$I \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

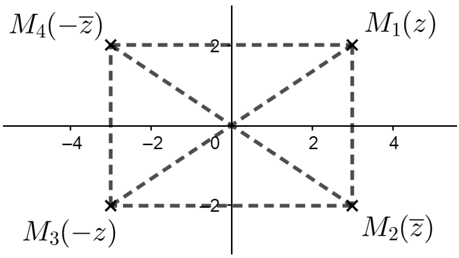
Démonstration

Exemple :
Si $z_A = 2+3i$ et $z_B = 1-i$ alors :

▷ $z_{\overrightarrow{AB}} =$ ....

▷ $z_I =$ ....

Propriété 2 – Affixes et symétrie par rapport aux axes



Démonstration

2. Module et arguments d'un nombre complexe

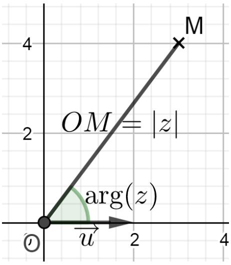
Définition 3 – Module et argument d'un nombre complexe

On note $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$ et M le point de $\mathbb{R}^2$ tel que z est l'affixe de M.

▷ On nomme **module de z** et on note $|z|$ le nombre $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

▷ On nomme **arguments de $z \neq 0$** et on note $\arg(z)$ les nombres :

$$\arg(z) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})\ [2\pi]$$



Remarque : on nomme « **coordonnées polaires de M** » le couple $(|z|\ ;\ \arg(z))$.

Exemples :

▷ Des coordonnées polaires de $M(1+i)$ sont (……… ; ………).

▷ Des coordonnées polaires de $M(1)$ sont (……… ; ………).

▷ Des coordonnées polaires de $M(i)$ sont (……… ; ………).

▷ Des coordonnées polaires de $M(1-i)$ sont (……… ; ………).

Propriété 3 – Ecriture trigonométrique

On note θ un des arguments de $z = x + iy$ non nul alors :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{x}{|z|}$$

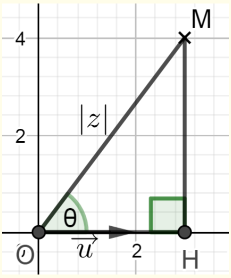
$$\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{y}{|z|}$$

On nomme **écriture trigonométrique** l'écriture de z sous la forme :

$$z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Démonstration

On note θ un des arguments de $z = x + iy$ alors :



On utilise les formules de trigonométrie dans le triangle OMH rectangle en H :
▷ $\cos\theta =$ ....

▷ $\sin\theta =$ ....

de plus : $z = x + iy =$ ....

Exemples :
▷ Une écriture trigonométrique de $1 + i$ est ....
▷ Une écriture trigonométrique de i est ....
▷ Une écriture trigonométrique de $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est ....

Propriété 4 – Formules d'additions en trigonométrie

Soient θ et θ' deux réels, alors :

$$1)\ \cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$$

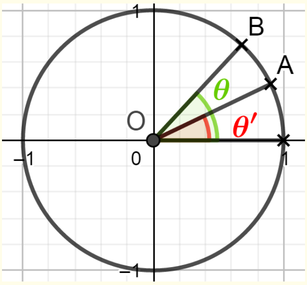
$$2)\ \cos(\theta - \theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$$

$$3)\ \sin(\theta + \theta') = \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'$$

$$4)\ \sin(\theta - \theta') = -\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'$$

Démonstration

On note A et B deux points du cercle trigonométrique tels que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \theta$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \theta'$.


B
A
O
θ
θ′
1
−1
0
1
−1

Propriété 5 – Formules de duplication en trigonométrie

Soit θ un réel, alors :

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$$

Démonstration

Propriété 6 – Formules de linéarisation en trigonométrie

Soit θ un réel, alors :

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$
$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$
$$\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

Démonstration

Propriété 7 – Formules de factorisation en trigonométrie

Soit θ un réel, alors :

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$1-\cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Démonstration

Propriété 8 – Produit de deux nombres complexes

Soit $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$ deux nombres complexes, alors :

$$zz' = |z| \times |z'|(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$$

Démonstration

Exemple :

▷ $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ alors :

$z_1 \times z_2 =$

Propriété 9 – Inverse d'un nombre complexe

Soit $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta') \neq 0$ un nombre complexe, alors :

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{|z'|}(\cos(-\theta') + i\sin(-\theta'))$$

Démonstration

Exemple :

$\triangleright$ $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ alors :

$\frac{1}{z_1} =$

Propriété 10 – Quotient de complexes

Soit $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta') \neq 0$ deux nombres complexes, alors :

$$\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}(\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta'))$$

Démonstration

Exemple :

$\triangleright$ $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ alors :

$\frac{z_1}{z_2} =$

3. Propriétés du module et des arguments

Propriété 11 – propriétés du module

Quels que soient les nombres complexes z et z' :

1) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
2) $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}$
3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, $z \neq 0$
4) $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$
5) $|\overline{z}| = |z|$
6) $|-z| = |z|$
7) $|z|^2 = z\overline{z}$

Démonstration

Propriété 12 – Propriétés des arguments

Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls :

$$\begin{array}{l}
1)\ \arg\left(z \times z'\right) = \arg(z) + \arg\left(z'\right)\ [2\pi] \\
2)\ \arg\left(z^n\right) = n \times \arg(z)\ [2\pi],\ n \in \mathbb{N} \\
3)\ \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi] \\
4)\ \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg\left(z'\right)\ [2\pi],\ z' \neq 0 \\
5)\ \arg\left(\overline{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi] \\
6)\ \arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]
\end{array}$$

Démonstration

Exemple :
On note $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.
Calculons z^5 :

▷ $\left|z^5\right| =$ ....

▷ $\arg\left(z^5\right) =$ ....
ou
$z^5 =$

4. Nombres complexes et géométrie

Propriété 13 – Module, argument et géométrie

On note A, B et C trois points du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthogonal et les affixes correspondants z_A, z_B et z_C dans $\mathbb{C}$, alors :

$$1)\ |z_B - z_A| = \| \overrightarrow{AB} \| = AB$$

$$2)\ \arg(z_B - z_A) = (\widehat{\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AB}})\ [2\pi]$$

$$3)\ \left|\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right| = \frac{AB}{AC}$$

$$4)\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = (\widehat{\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{BA}})\ [2\pi]$$

Démonstration

Méthode 1 – Ensemble de points

On utilise la propriété précédente pour un ensemble de points $M(z)$ vérifiant $|z - z_A| = |z_B - z_C|$ ou $|z - z_A| = |z - z_B|$.

Exemples :

► On note trois points A, B et C d'affixes respectifs $a = -1 + i$, $b = -1 - i$ et $c = 2i$.
Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $|z - z_A| = |z_B - z_C|$.
▷ $|z - z_A| = AM$ et $|z_B - z_C| = |-1-3i| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

On a donc :

$$|z - z_A| = |z_B - z_C| \Leftrightarrow AM = \sqrt{10}$$

Tous les points M sont donc sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{10}$.

► On note deux points A et B d'affixes respectifs $a = -1 + i$ et $b = -1 - i$.
Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $|z - z_A| = |z - z_B|$.
▷ $|z - z_A| = AM$ et $|z - z_B| = BM$

On a donc :

$$|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

Tous les points M sont donc sur la médiatrice du segment $[AB]$ et donc sur l'axe des abscisses car A et B sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriété 14 – Points alignés, droites parallèles et droites perpendiculaires

On note A, B, C et D quatre points du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthogonal et les affixes correspondants z_A, z_B, z_C et z_D dans $\mathbb{C}$, alors :

1) A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$.

2) $(AB)//(DC) \Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}$.

3) $(AB) \perp (DC) \Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

4) ABC est un triangle rectangle isocèle en $A \Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i$.

Démonstration

Méthode 2 – Nature d'une figure géométrique

On utilise la propriété précédente pour justifier la nature de certaines figures géométriques.

Exemple :

On note trois points B, C et D d'affixes respectifs $b=-1-i$, $c=2i$ et $d=2-2i$.
Donner la nature du triangle BCD.

▷ $\dfrac{c-b}{d-b}=\dfrac{2i-(-1-i)}{2-2i-(-1-i)}=\dfrac{1+3i}{3-i}=\dfrac{(1+3i)(3+i)}{10}=\dfrac{10i}{10}=i$

BCD est donc rectangle isocèle en B.