CHAPITRE 1

NOMBRES COMPLEXES (PARTIE 1)

On doit à **Gauss** (1777-1855) une définition des nombres complexes. La notation $z = a + ib$ avec $i^2 = -1$ est due à **Euler** (1707-1783).

Les nombres complexes sont nés d'un problème algébrique : la résolution de l'équation de degré 3.

L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du XVI^e siècle avec une première apparition en 1545, dans l'œuvre de **Cardan** (1501-1576), d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appelle "sophistiqué".

C'est **Bombelli** (1526-1572) qui met en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appelle alors "impossibles" avant de leur donner le nom "d'imaginaires".

Les contenus du chapitre

▷ Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Partie réelle et partie imaginaire. Opérations.
▷ Conjugaison. Propriétés algébriques.
▷ Inverse d'un nombre complexe non nul.
▷ Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.
▷ Résoudre une équation linéaire $az = b$.
▷ Résoudre une équation simple faisant intervenir z et $\overline{z}$.

Cours

1. Définition et notation

Définition 1 – Ensemble des nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres de la forme $z = a + bi$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \text{ tel que } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

On dira que $a + ib$ est **l'écriture algébrique** du nombre complexe z.
En sciences physiques, on note j à la place de i car i représente l'intensité du courant.

Exemples :
▷ $z = 2 + 3i$
▷ $z = 3 - i$
▷ $z = i$
▷ $z = 2$

Propriété 1 – $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Tout nombre réel est un nombre complexe.

Démonstration

⚠ Il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$. On ne peut pas ordonner les nombres complexes avec les relations $<$, $>$, $\leq$ et $\geq$.

Définition 2 – Partie réelle et partie imaginaire

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$

▷ a se nomme **la partie réelle** de z et se note $\mathrm{Re}(z)$.
▷ b se nomme **la partie imaginaire** de z et se note $\mathrm{Im}(z)$.

Exemples :

▷ Dans $z = 3 - 4i$, $\text{Re}(z) = \dots\dots\dots$ et $\text{Im}(z) = \dots\dots\dots.$

▷ Dans $z = 5$, $\text{Re}(z) = \dots\dots\dots$ et $\text{Im}(z) = \dots\dots\dots.$

▷ Dans $z = 7i$, $\text{Re}(z) = \dots\dots\dots$ et $\text{Im}(z) = \dots\dots\dots.$

Définition 3 – Imaginaire pur et réel

Soit $z \in \mathbb{C}$

▷ On dit que z est **un imaginaire pur** si $\text{Re}(z) = 0$.

▷ On dit que z est **un réel** si $\text{Im}(z) = 0$

Exemples :

▷ $z = 3i$ est un ....

▷ $z = 3$ est un ....

Définition 4 – Ensemble des imaginaires purs

On note $i\mathbb{R}$ **l'ensemble des imaginaires purs**.

$$i\mathbb{R} = \{z = ia \text{ où } a \in \mathbb{R}\}$$

Définition 5 – Complexe conjugué

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On nomme **conjugué de z** et on note $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Exemples :

▷ Si $z = 2 + 3i$ alors $\overline{z} = \dots\dots\dots\dots\dots.$

▷ Si $z = 2 - 3i$ alors $\overline{z} = \dots\dots\dots\dots\dots.$

▷ Si $z = 3i$ alors $\overline{z} = \dots\dots\dots\dots\dots.$

▷ Si $z = 2$ alors $\overline{z} = \dots\dots\dots\dots\dots.$

Propriété 2 – Conjugué d'un réel

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$

Démonstration

Propriété 3 – Conjugué d'un imaginaire pur

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow -z = \overline{z}$$

Démonstration

2. Opérations dans $\mathbb{C}$

On note $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, a', b, b' sont des réels.

Propriété 4 – Somme de deux complexes

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

donc

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')\\ \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')\end{array}\right.$$

Démonstration

Exemples :

▷ $z = 3 + 4i$ et $z' = -5 + 3i$ alors $z + z' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

▷ $z = 3 + 4i$ et $z' = -2i$ alors $z + z' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Propriété 5 – Conjugué d'une somme

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués.

Démonstration

Propriété 6 – Différence de deux complexes

$$z - z' = (a - a') + i(b - b')$$

ou

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z - z') = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z - z') = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

Démonstration

Exemples :

▷ $z = 3+4i$ et $z' = -5+3i$ alors $z - z' =$ ....

▷ $z = 3+4i$ et $z' = -2i$ alors $z - z' =$ ....

Propriété 7 – Conjugué d'une différence

$$\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$$

Le conjugué d'une différence est la différence des conjugués.

Démonstration

Propriété 8 – Produit de deux complexes

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

ou

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z \times z') = \mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z) \times \mathrm{Im}(z') \\ \mathrm{Im}(z \times z') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z') \end{cases}$$

Démonstration

Exemples :

▷ $z = 3+4i$ et $z' = -5+3i$ alors $z \times z' =$ ....

▷ $z = 3+4i$ et $z' = 3-4i$ alors $z \times z' =$ ....

Propriété 9 – Produit par son conjugué

$$z \times \overline{z} = a^2 + b^2$$

ou

$$z \times \overline{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)$$

Démonstration

Exemples :

▷ $z = 3 + 4i$ alors $z \times \overline{z} =$ ....

▷ $z = 1 + i$ alors $z \times \overline{z} =$ ....

Propriété 10 – Conjugué d'un produit

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués.

Démonstration

Propriété 11 – Inverse d'un nombre complexe

Si $z \in \mathbb{C}^*$,

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{z\overline{z}}\right) - i\left(\frac{b}{z\overline{z}}\right)$$

ou

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{z\overline{z}}\right) - i\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{z\overline{z}}\right)$$

Démonstration

Exemples :

▷ $z = 3+4i$ alors $\frac{1}{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ $z = 1-i$ alors $\frac{1}{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété 12 – Conjugué d'un inverse

Si $z \neq 0$,

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

Le conjugué d'un inverse est l'inverse du conjugué.

Démonstration

Propriété 13 – Conjugué d'une puissance entière

Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$$

Le conjugué d'une puissance entière est la puissance entière du conjugué.

Démonstration

Exemple :

▷ $\overline{(1+i)^3} = (\overline{1+i})^3 = (1-i)^3$

Propriété 14 – Quotient de deux nombres complexes

Si $z' \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{z}{z'} = \left(\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}\right) + i\left(\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}\right)$$

Démonstration

Méthode 1 – Quotient de deux complexes

Pour calculer le quotient $\dfrac{z}{z'}$ on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{z'}$.

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \frac{z\overline{z'}}{a'^2 + b'^2}$$

Cette opération permet de ne plus avoir le nombre i qui apparaît au dénominateur.

Exemples :

▷ $\dfrac{2+3i}{1+i} =$ ....

▷ $\dfrac{1-i}{2+2i} =$ ....

Propriété 15 – Conjugué d'un quotient

Si $z' \neq 0$,

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués.

Démonstration

Propriété 16 – Stabilité de $\mathbb{C}$

▷ $\mathbb{C}$ est stable par addition, soustraction, produit et quotient.

Démonstration

Méthode 2 – Equation de la forme $az = b$

▷ Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors il n'y a pas de solution. $S = \emptyset$.

▷ Si $a = 0$ et $b = 0$ alors tous les nombres complexes sont solutions donc $S = \mathbb{C}$.

▷ Si $a \neq 0$ alors $z = \dfrac{b}{a}$ donc $S = \left\{\dfrac{b}{a}\right\}$.

Exemples :

▷ $2z = 3 \Leftrightarrow$ ....

▷ $3z = 4 + 3i \Leftrightarrow$ ....

▷ $(1+i)z = 2+3i \Leftrightarrow$ ....
▷ $z^2 = -1 \Leftrightarrow$ ....

3. Formule du binôme de Newton

Méthode 3 – Triangle de Pascal

A l'aide des propriétés des coefficients binomiaux vus en spécialité mathématique, on peut en déduire le triangle de Pascal, très utile dans de nombreux domaines comme par exemple le développement de $(a+b)^n$ avec a, b dans $\mathbb{C}$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Le triangle de Pascal nous donne les cœfficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $k \in \{0; 1; ...; n\}$

Exemple :
Utilisation du triangle de Pascal pour développer $(a+b)^4$.
La cinquième ligne du tableau nous donne les cœfficients du développement.
Pour les puissances, il suffit de commencer par a^4 et b^0 puis de faire diminuer les puissances de a et d'augmenter celles de b.
On obtient donc :

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4 \\ &= 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Pour développer $(a-b)^4$ il suffit de changer le signe du terme dont la puissance de b est impaire.

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

Pour généraliser la méthode ci-dessus on va démontrer la propriété suivante permettant d'avoir les identités remarquables pour toutes les valeurs de n.

Propriété 17 – La formule du binôme de Newton

Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration

On utilise les formules vues en spécialité mathématiques :

▷ Formule de Pascal : pour $n \geq 1$ et $k \in \{1;\ldots;n-1\}$, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

▷ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

On va faire une démonstration par récurrence :

On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Initialisation : (Pour $n = 0$)

$(a+b)^0 = \ldots\ldots\ldots$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

donc $\mathbf{P}_0$ est ……….

Hérédité : on suppose que $\mathbf{P}_n$ est vraie pour un rang n, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Conclusion :

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P}_0 \text{ est} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{P}_k \text{ implique } \mathbf{P}_{k+1}\end{array}\right\}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, ...

Exemple :

$(a+b)^5 =$

et de même : $(a-b)^5 =$