Ministère de
l'enseignement supérieur
et de la recherche

Secrétariat Général
Direction générale des ressources humaines

Rapport sur l'agrégation interne et le CAERPA de mathématiques

Année 2009

Ce rapport, rédigé par des membres du jury, est publié sous la responsabilité du président du jury

Table des matières

Chapitre 1

Composition du jury

Président		
M. Robert CABANE	Inspecteur général	
Vice-présidents		
Anne BURBAN	Inspectrice générale	
Hervé QUEFFELEC	Professeur d'université	LILLE
Marc ROSSO	Professeur des universités	PARIS
Eric VAN DER OORD	Inspecteur général	
Secrétaire		
Jean Marie CHEVALLIER	Maître de conférences	ORLEANS

Correcteurs et examinateurs

Anne-Marie AEBISCHER	PRAG	BESANCON
Florence BANTEGNIES	Professeure de chaire supérieure	PARIS
Françoise BERQUIER	Maître de conférences	LILLE
Henry BERTRAND	IA-IPR	MONTPELLIER
Sylvie BONNET	Professeure de chaire supérieure	BESANCON
Hassan BOUALEM	Maître de conférences	MONTPELLIER
Guillaume BREVET	Professeur agrégé	BORDEAUX
Robert BROUZET	Maître de conférences	MONTPELLIER
Laurent CHAUMARD	Professeur agrégé	MONTPELLIER
René CORI	Maître de conférences	PARIS
Jean-François DANTZER	Professeur agrégé	ANGERS
Gérard DEBEAUMARCHE	Professeur agrégé	REIMS
Thierry DUGARDIN	Professeur de chaire supérieure	CRETEIL
Monique ERNOULT	IA-IPR	CRETEIL
Sandrine GACHET	Professeure agrégée	DIJON
Viviane GAGGIOLI	Professeure agrégée	LYON
Patrick GÉNAUX	Professeur de chaire supérieure	STRASBOURG
Christine GEORGELIN	Maître de conférences	TOURS
Michèle GRILLOT	Maître de conférences	ORLEANS
Christophe HENOCQ	Professeur de chaire supérieure	PARIS
Michel HENRI	Professeur de chaire supérieure	POITIERS
Marie-Emmanuelle JOINT	Professeure agrégée	ANGERS
Salim KOBEISSI	PRAG	GRENOBLE
Pierre LETERRIER	Professeur agrégé	SCEAUX
Geneviève LORIDON	IA-IPR	BESANCON
Jean-Paul MARGIRIER	Professeur agrégé	LYON
Marie-Hélène MOURGUES	Maître de conférences	CRETEIL
Françoise MUNCK-FRABOUL	IA-IPR	NANTES
Stéphan PAINTANDRE	Professeur agrégé	TOULOUSE
Claudine PICARONNY	Maître de conférences	CACHAN
Marc POLZIN	Maître de conférences	BORDEAUX
Janine REYNAUD	IA-IPR	LYON
Philippe RODOT	Professeur de chaire supérieure	DIJON
Claude ROUFF	Professeur agrégé	CLERMONT-FERRAND
David RUPPRECHT	Professeur agrégé	NANCY
Bernard SARAMITO	Professeur d'université	CLERMONT-FERRAND
Eric SIGWARD	IA-IPR	STRASBOURG
Frédéric SUFFRIN	Professeur agrégé	STRASBOURG
Jean-Pierre VIAL	Professeur de chaire supérieure	PARIS
Georges VINAVER	PRAG	EVRY

Chapitre 2

Déroulement et statistiques

2.1 Généralités

Les épreuves écrites ont eu lieu les 29 et 30 janvier 2009, la liste d'admissibilité a été signée le 23 mars 2009 avec les chiffres suivants :
Agrégation interne : 258 admissibles ; CAERPA : 26 admissibles.
Les épreuves orales se sont déroulées du 18 au 25 avril 2009, au collège Stanislas à Paris. La liste d'admission a été signée le 28 avril 2009 avec les chiffres suivants :
Agrégation interne : 107 admis ; CAERPA : 12 admis.
Remarques : Comme on peut le constater sur les tableaux d'évolution des deux concours donnés ci-après, le nombre des candidats présents aux deux épreuves écrites est en diminution cette année, après une augmentation depuis plusieurs années. Tous les contrats proposés au concours de l'enseignement privé n'ont pu être pourvus.
Le calendrier prévu pour la session 2010 est le suivant :
Écrit : jeudi 28 et vendredi 29 janvier ; oral : sans doute entre le 10 avril et le 20 avril à Paris.

2.2 Évolution des concours

2.2.1 Agrégation interne

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1996	246	2249	1150	441	246
1997	200	2113	1084	436	200
1998	200	2083	1071	432	200
1999	168	1690	1162	436	168
2000	130	1868	1257	327	130
2001	129	1944	1419	289	125
2002	129	1845	1400	288	129
2003	130	1842	1479	288	130
2004	130	1813	1382	287	130
2005	138	1897	1401	311	138
2006	110	2172	1599	273	110
2007	107	2198	1627	267	107
2008	107	2195	1682	257	107
2009	107	2124	1559	258	107

2.2.2 CAERPA

Année	Contrats	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1996	39	375	176	64	39
1997	32	379	181	58	32
1998	28	372	169	61	28
1999	27	328	225	64	26
2000	27	359	246	46	24
2001	25	383	268	35	18
2002	23	326	229	22	10
2003	20	325	258	27	15
2004	24	311	241	21	9
2005	19	297	211	27	12
2006	19	329	240	18	13
2007	20	319	221	11	5
2008	15	356	258	22	11
2009	14	305	212	26	12

2.3 Statistiques de l'agrégation interne 2009

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites.

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	2124	1559	258	107
Femmes	706	524	71	25
Français et U.E.	2124	1559	258	107
Étrangers hors UE	0	0	0	0
Moins de 50 ans	1986	1457	254	105
Moins de 45 ans	1845	1364	249	102
Moins de 40 ans	1575	1171	223	87
Moins de 35 ans	1042	777	155	62
Moins de 30 ans	250	185	19	8

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	8	6	3	13	11	9	14	12	10
épreuve 2 (sur 20)	8	5	3	12	10	9	13	11	10
Total écrit (sur 200)	80	58	36	117	105	96	127	116	104

Écrit, épreuve 1 moyenne des admis : 12.11

Écrit, épreuve 2 moyenne des admis : 11.19

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	2	2	2	0	0	0
19	0	0	0	2	2	2	0	0	0
18	0	0	0	5	5	5	0	0	0
17	0	0	0	6	6	5	0	0	0
16	2	2	2	12	12	9	1	1	1
15	3	3	3	21	21	16	6	6	5
14	9	9	8	37	37	27	19	19	16
13	26	26	23	65	65	46	37	37	29
12	54	54	44	104	101	60	69	66	41
11	87	87	67	166	146	78	136	126	72
10	158	158	88	238	185	94	213	175	87
9	258	258	107	351	232	102	322	213	96
8	400	258	107	497	253	106	476	243	104
7	549	258	107	653	256	106	604	253	106
6	741	258	107	834	258	107	782	258	107
5	935	258	107	1025	258	107	973	258	107
4	1103	258	107	1180	258	107	1117	258	107
3	1253	258	107	1316	258	107	1265	258	107
2	1386	258	107	1447	258	107	1385	258	107
1	1496	258	107	1548	258	107	1499	258	107
0	1559	258	107	1595	258	107	1566	258	107

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	13	11	8	15	13	11
épreuve 2 (sur 20)	13	10	7	15	13	10
Total général (sur 400)	234	209	184	261	239	226

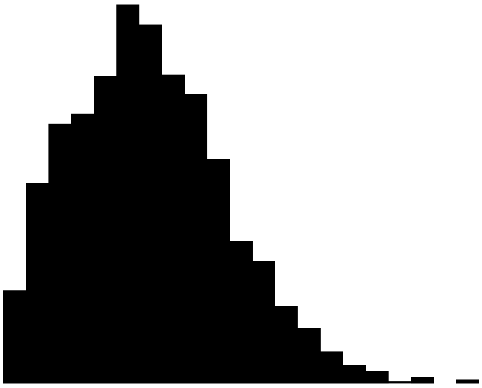
Explication : la première colonne contient le niveau du quartile supérieur, la seconde colonne la médiane et la troisième le quartiel inférieur.

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	2	2
19	0	0	3	3	4	4
18	0	0	3	3	11	11
17	0	0	10	9	15	15
16	0	0	24	22	24	23
15	5	5	34	32	34	32
14	10	10	58	48	52	44
13	28	28	82	61	70	61
12	50	50	98	72	89	71
11	96	96	128	87	105	79
10	149	107	156	97	132	87
9	195	107	173	99	156	95
8	236	107	196	102	176	98
7	250	107	208	104	197	101
6	251	107	231	106	218	103
5	251	107	248	107	241	106
4	251	107	252	107	251	107
3	251	107	252	107	251	107
2	251	107	252	107	251	107
1	251	107	252	107	251	107
0	251	107	252	107	251	107

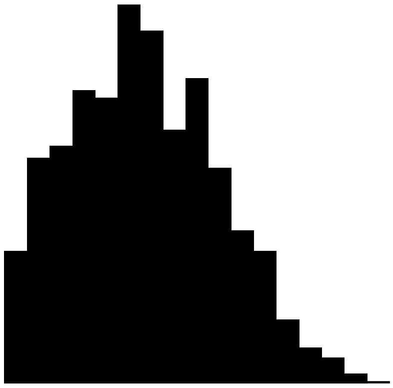
Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	116	84	10	4
BESANCON	30	23	7	1
BORDEAUX	79	64	10	4
CAEN	31	27	3	0
CLERMONTFERRAND	43	36	7	3
DIJON	44	37	6	2
GRENOBLE	87	54	6	3
LILLE	167	135	19	5
LYON	94	71	15	7
MONTPELLIER	86	58	11	3
NANCY METZ	74	51	13	5
POITIERS	49	38	5	2
RENNES	43	35	4	2
STRASBOURG	54	41	6	5
TOULOUSE	71	51	7	3
NANTES	64	43	13	7
ORLEANS TOURS	63	44	2	1
REIMS	37	26	3	1
AMIENS	64	49	6	2
ROUEN	56	50	6	2
LIMOGES	27	22	1	1
NICE	73	52	9	2
CORSE	15	9	3	2
REUNION	75	60	9	3
MARTINIQUE	22	15	1	1
GUADELOUPE	35	19	5	2
GUYANNE	17	10	1	0
PARIS/CRET/VERS	471	327	69	33
NOUVELLE CALEDO	10	6	0	0
POLYNESIE	12	8	0	0
MAYOTTE	15	14	1	1

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	27	13	0	0
ENSEIGNANT SUP	9	6	1	1
ENS.FPE.TIT	63	46	2	1
AG FPE	44	21	1	0
AGREGE	18	14	2	1
CERTIFIE	1854	1397	250	104
PLP	109	62	2	0

catégories				
	I	P	a	A
DIVERS	1	1	0	0
ENS.TIT.MEN	2015	1491	255	106
AG.FONC.PUB.ETA	108	67	3	1



Écrit 1



Écrit 2

Oral 1

Oral 2

Seuil d'admissibilité : 90.00/200 (9.00/20)

Seuil d'admission : 215.00/400 (10.75/20)

2.4 Statistiques du CAERPA 2009

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites.

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	305	212	26	12
Femmes	109	77	8	5
Moins de 50 ans	273	193	26	12
Moins de 45 ans	246	171	25	11
Moins de 40 ans	204	140	23	10
Moins de 35 ans	133	92	16	8
Moins de 30 ans	42	31	6	4

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	7	4	2	13	11	9	14	13	11
épreuve 2 (sur 20)	7	4	2	13	10	10	14	13	12
Total écrit (sur 200)	70	44	19	130	98	96	143	130	112

Écrit, épreuve 1 moyenne des admis : 12.31

Écrit, épreuve 2 moyenne des admis : 12.75

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	1	1	1	0	0	0
17	0	0	0	1	1	1	0	0	0
16	0	0	0	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	2	2	2	2	2	2
14	3	3	3	3	3	3	5	5	5
13	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	7	7	7	7	7	7	9	9	9
11	9	9	9	14	13	9	15	12	10
10	11	11	10	22	18	11	25	20	11
9	26	26	12	36	22	11	32	21	11
8	37	26	12	48	26	12	49	26	12
7	53	26	12	64	26	12	59	26	12
6	66	26	12	81	26	12	71	26	12
5	92	26	12	99	26	12	98	26	12
4	119	26	12	127	26	12	123	26	12
3	138	26	12	144	26	12	148	26	12
2	158	26	12	173	26	12	164	26	12
1	191	26	12	202	26	12	198	26	12
0	212	26	12	219	26	12	215	26	12

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	13	10	8	14	13	12
épreuve 2 (sur 20)	11	8	6	12	10	8
Total général (sur 400)	237	215	163	256	237	220

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0
17	0	0	1	1	0	0
16	0	0	1	1	0	0
15	0	0	2	2	0	0
14	0	0	5	5	1	1
13	2	2	6	6	2	2
12	4	4	9	9	5	5
11	9	9	9	9	6	5
10	12	12	12	10	9	8
9	15	12	13	10	11	8
8	20	12	18	11	14	10
7	24	12	22	12	16	11
6	24	12	22	12	19	12
5	24	12	23	12	24	12
4	24	12	24	12	24	12
3	24	12	24	12	24	12
2	24	12	24	12	24	12
1	24	12	24	12	24	12
0	24	12	24	12	24	12

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	19	13	0	0
BESANCON	5	4	0	0
BORDEAUX	13	9	1	0
CAEN	3	2	0	0
CLERMONTFERRAND	5	5	1	0
DIJON	5	3	1	1
GRENOBLE	14	11	1	1
LILLE	44	36	4	4
LYON	14	10	3	1
MONTPELLIER	8	3	0	0
NANCY METZ	11	7	2	0
POITIERS	5	4	0	0
RENNES	14	12	3	1
STRASBOURG	10	6	0	0
TOULOUSE	8	4	1	1
NANTES	25	18	2	0
ORLEANS TOURS	5	5	1	0
REIMS	7	3	0	0
AMIENS	6	2	0	0
ROUEN	3	1	0	0
LIMOGES	1	1	0	0
NICE	6	2	0	0
REUNION	3	2	0	0
MARTINIQUE	2	2	1	1
GUYANNE	2	2	0	0
PARIS/CRET/VERS	58	40	4	2
NOUVELLE CALEDO	3	2	1	0
POLYNESIE	6	3	0	0

Professions				
	I	P	a	A
MAIT-DOC REM TI	265	190	24	12
MAIT-DOC REM MA	21	9	1	0
MAITRE ECH INST	19	13	1	0

Seuil d'admissibilité : 90.00/200 (9.00/20)
Seuil d'admission : 215.00/400 (10.75/20)

Chapitre 3

Programme du concours

3.1 Avertissement et préliminaires

On trouvera ci-dessous le programme du concours pour 2010, qui est quasiment identique au programme 2009, excepté la partie 3.4. Ce programme fut publié au BO spécial n $^\circ$ 4 du 24 mai 2009, téléchargeable ici :

http://media.education.gouv.fr/file/special_6/18/4/special6-agregation-interne_62184.pdf

L'attention des candidats est également attirée sur l'évolution du programme de la classe de Seconde.

Un professeur de mathématiques devrait avoir élaboré et intériorisé une vue globale, personnelle et cohérente de ses connaissances dans sa discipline à travers son histoire et ses liens avec les autres disciplines. La préparation à l'Agrégation interne peut être l'occasion d'une fructueuse réflexion. C'est dans cet esprit qu'il a été procédé à cette mise à jour du programme complémentaire, la connaissance de ceux de toutes les sections de l'enseignement secondaire étant d'autre part demandée aux candidats. Ce texte décrit un ensemble de connaissances souhaitable pour un professeur agrégé. Il sera périodiquement remis à jour. Il ne doit pas être interprété de façon rigide et formaliste. Son but est surtout d'aider les candidats dans leur réflexion et dans le nécessaire effort d'unification de leurs connaissances. S'il est commode de présenter un programme en rubriques, ce découpage ne doit pas dégénérer en cloisonnement. C'est ainsi qu'il est proposé certains rapprochements qui peuvent être complétés par d'autres. Ce texte comporte aussi des répétitions quand une même notion intervient à plusieurs endroits. Ainsi, une même notion peut être d'abord approchée dans un cadre particulier, puis sous un aspect plus général.

L'attention des candidats est attirée sur la partie 3.4 du programme qui concerne la seconde épreuve orale (dite d'exemples et exercices) et est appelée à évoluer d'année en année.

3.2 Programme de l'enseignement secondaire

Ce programme comporte tous les programmes en vigueur, des classes de la seconde à la terminale incluses, et dans toutes les sections.

3.3 Programme complémentaire

3.3.1 Ensembles

Vocabulaire de la théorie des ensembles. Produit d'un nombre fini d'ensembles. Applications. Relations d'ordre.

Ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels. Ensembles dénombrables. Non dénombrabilité de $\mathbf{R}$.
Relations d'équivalence et ensemble quotient.

3.3.2 Algorithmique et informatique

Exemples d'algorithmes liés au programme.
Notion de variable. Instruction d'affectation, instructions conditionnelles, programmation itérative et récursive.
Fonctions et sous-programmes (ou procédures) ; passage de paramètre. Rédaction en français ou dans un langage au choix du candidat de programmes ne comportant qu'un petit nombre d'instructions pouvant utiliser des sous-programmes.
Aucun développement théorique n'est au programme.

3.3.3 Algèbre générale

Extensions successives de la notion de nombre

Anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Division euclidienne. Sous-groupes additifs de $\mathbf{Z}$. Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Congruences. Applications arithmétiques des anneaux quotients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Théorème chinois. Groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications à des problèmes de calendriers. Exemples de méthodes de codage et de cryptage. Équations diophantiennes $ax + by = c$.
Corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, $\mathbf{R}$ des nombres réels, $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Théorèmes de d'Alembert-Gauss. Non dénombrabilité de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.
Groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines n-ièmes de l'unité. Relations d'inclusion entre ces groupes. Polygones réguliers.

Anneaux et corps

(Écrit seulement)
Définition (les anneaux sont unitaires par définition). Formule du binôme. Idéaux d'un anneau commutatif. Morphismes d'anneaux. Anneaux quotients. Anneaux commutatifs intègres. Anneaux principaux. Exemple des entiers de Gauss, applications (équation $x^2 + y^2 = z^2$ dans $\mathbf{Z}$).
Sous-corps. Corps premier. Caractéristique d'un corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Éléments algébriques sur un sous-corps. Dénombrabilité du corps des nombres algébriques sur $\mathbf{Q}$. Nombres transcendants.

Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif K

Algèbre K[X]. Division euclidienne. Idéaux de K[X]. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorèmes de Bézout. Algorithme d'Euclide. Polynômes irréductibles. Décomposition en facteurs irréductibles.
Fonctions polynômes. Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés. Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes. Cas où $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p étant un nombre premier. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.
Théorème de d'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.
Dérivation des polynômes. Identité de Taylor.

Fractions rationnelles sur un corps commutatif K

Corps $K(\mathrm{X})$ des fractions rationnelles. Forme irréductible. Fonctions rationnelles, zéros, pôles, ordre de multiplicité.
Décomposition en éléments simples. Cas où le corps est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Exemples simples de problèmes d'élimination ; applications à la géométrie.

3.3.4 Groupes et géométrie

Les diverses notions sur les groupes devront être illustrées dans des situations géométriques (par exemple isométries d'un tétraèdre régulier, d'un cube).
Groupes, morphismes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques, ordre d'un élément. Théorème de Lagrange. Image et noyau.
Sous-groupe distingué (ou normal). Groupe quotient.
Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Stabilisateurs. Formule des classes. Éléments conjugués, classes de conjugaison, classes de sous-groupes conjugués. Signification géométrique des notions de conjugaison. Automorphismes intérieurs d'un groupe.
Polygones réguliers et groupes diédraux.
Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique ; cycles, génération par les transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné.
Groupes $GL(E)$ et $SL(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Groupes $O(E)$ et $SO(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien. Groupes $U(E)$ et $SU(E)$ où E est un espace hermitien. Groupe affine, groupe des homothéties et translations d'un espace affine. Groupe des isométries et des déplacements d'un espace affine euclidien. Formes réduites des isométries affines en dimension 2 et 3. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace. Groupe des similitudes directes et indirectes d'un plan affine euclidien.

3.3.5 Algèbre linéaire sur un sous-corps de C

Espaces vectoriels

Définition. Applications linéaires. Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$. Algèbre $\mathscr{L}(E)$. Groupe linéaire $GL(E)$. Espace produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.
Sous-espaces vectoriels. Image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs. Endomorphismes involutifs.
Familles libres, génératrices, bases.
Étant donné u de $\mathscr{L}(E,F)$, isomorphisme entre $\mathrm{Im}(u)$ et tout supplémentaire de $\ker(u)$.

Dans la suite, les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.

Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. Théorèmes de la dimension, de la base incomplète. Dimension d'un sous-espace. Rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires.
Formule liant dimensions de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces. Rang d'une application linéaire. Formule du rang. Caractérisation des automorphismes.

Matrices

Espaces $\mathscr{M}_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans K. Isomorphisme canonique avec $\mathscr{L}(K^q, K^p)$. Produit matriciel. Matrices inversibles. Groupe $GL(n,K)$.

Matrice d'une application linéaire entre espaces vectoriels munis de bases. Matrice de passage. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes et caractérisation par le rang. Utilisation de sous-matrices carrées pour la détermination du rang. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.
Matrice d'un endomorphisme d'un espace rapporté à une base. Matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.
Systèmes d'équations linéaires. Rang. Conditions de compatibilité. Systèmes de Cramer. Résolution par opérations élémentaires (pivot de Gauss). Applications à des problèmes de géométrie.

Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Application à la résolution de systèmes linéaires, aux calculs de déterminants, à l'inversion de matrices carrées et au calcul du rang. Applications linéaires associées aux opérations élémentaires : dilatations et transvections. Génération de $GL(n, K)$ et $SL(n, K)$.

Déterminants

Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n. Déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base. Déterminant d'un endomorphisme, d'un composé d'endomorphismes. Caractérisation des automorphismes.
Déterminant d'une matrice carrée. Expression développée. Déterminant de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. Mineurs, cofacteurs, développement relativement à une ligne ou une colonne. Calcul par opérations élémentaires.
Application à l'inversion d'une matrice carrée. Formules de Cramer. Orientation d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Exemples de calculs de volumes simples.
Groupes $SL(E)$ et $SL(n, K)$.

Dualité

Formes linéaires et hyperplans. Équation d'un hyperplan. Dual E^* d'un espace vectoriel E. Base duale d'une base. Application à la formule d'interpolation de Lagrange. Bijection entre les ensembles des sous-espaces de E et E^* par l'orthogonalité. Orthogonal d'une somme ou d'une intersection de deux sous-espaces. Dimension de l'orthogonal.
Transposée d'une application linéaire. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables par un endomorphisme.
Algèbre $K[u]$ des endomorphismes polynômiaux en un endomorphisme u de E. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.
Triangulation d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, si le polynôme caractéristique est scindé. Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé. Théorème de Cayley-Hamilton.
Théorème de décomposition des noyaux. Polynôme minimal. Sous-espaces caractéristiques.
Critères de diagonalisabilité : la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée ; il existe un polynôme scindé annulateur à racines simples.
Diagonalisation simultanée d'un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux.
Diagonalisation par blocs. Sous-espaces caractéristiques. Décomposition de Dunford : existence et unicité de l'écriture $u = d + n$ où d est diagonalisable et n nilpotent avec $d \circ n = n \circ d$ si le polynôme caractéristique est scindé.

Application de la réduction des endomorphismes à l'analyse (suites récurrentes, systèmes différentiels, etc.).

Cas où le corps K est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

Application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie à la topologie de $\mathscr{L}(E)$. Définition de $\exp(u)$, application aux systèmes différentiels.
Exemples de parties denses de $\mathscr{L}(E)$: $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathscr{L}(E)$; si $K = \mathbf{C}$, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est dense dans $\mathscr{L}(E)$.

Formes quadratiques

Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques. Morphisme de E vers E^* canoniquement associé à une forme bilinéaire. Matrice relativement à une base. Matrices congruentes.
Bases orthogonales. Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Loi d'inertie et signature dans le cas réel. Application aux coniques et quadriques. Application à l'analyse des données.

3.3.6 Géométrie affine en dimension finie

Le corps de base est $\mathbf{R}$.
Définition d'un espace affine. Espace vectoriel associé. Sous-espaces affines, direction d'un sous-espace affine. Droites, plans, hyperplans.
Repères. Orientation. Volume algébrique d'un parallélépipède orienté.
Applications affines. Projecteurs. Groupe affine. Isomorphisme du stabilisateur d'un point et du groupe linéaire. Symétries. Groupe des homothéties et translations. Effet d'une application affine sur les volumes.
Barycentres. Repères et coordonnées barycentriques. Isobarycentre.
Parties convexes. Intersection, images directe et réciproque par une application affine. Enveloppe convexe d'une partie. Exemples de problèmes d'optimisation.

3.3.7 Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne

Les espaces vectoriels sont tous de dimension finie.

Espaces euclidiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme euclidienne. Identité du parallélogramme. Isomorphisme canonique avec le dual. Orthogonalité. Bases orthonormales. Orthonormalisation de Schmidt. Projecteurs et symétries. Adjoint d'un endomorphisme et matrice associée dans une base orthonormale. Groupe orthogonal $O(E)$ et spécial orthogonal $SO(E)$.
Endomorphismes symétriques, réduction dans une base orthonormale. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles dont l'une est définie positive. Application aux axes de symétrie des coniques et quadriques dans un espace euclidien. Ellipsoïde d'inertie. Application à l'analyse des données.
Application à l'étude d'une surface au voisinage d'un point régulier.
Endomorphismes symétriques positifs et applications (norme d'un endomorphisme).

Angles

Matrice d'une rotation. Le groupe $SO(E)$ est commutatif en dimension 2. Angles dans le plan euclidien orienté. Sinus et cosinus d'un angle. Exponentielle complexe. Nombre π. Fonctions trigonométriques circulaires. Morphisme canonique de $\mathbf{R}$ vers $SO(2)$. Mesure des angles.
Angles orientés de droites en dimension 2.
Angles en dimension 3 : angle d'une rotation dont l'axe est orienté. Génération de $SO(E)$ par les demi-tours.
Similitudes vectorielles en dimension 2 et 3.

Calcul matriciel et normes euclidiennes

Projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace. Matrice de Gram. Distance d'un point à un sous-espace. Problème des moindres carrés.

Calculs vectoriels en dimension 3

Produit vectoriel. Produit mixte. Applications à la géométrie des trièdres.

Espaces hermitiens

Inégalités de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme hermitienne. Sommes directes orthogonales. Bases orthonormales. Adjoint d'un endomorphisme, matrice dans une base orthonormale. Endomorphismes hermitiens. Groupe unitaire $U(E)$ et spécial unitaire $SU(E)$.
Réduction d'un endomorphisme hermitien, endomorphismes hermitiens positifs, applications (norme d'un endomorphisme).

3.3.8 Géométrie affine euclidienne orientée

Généralités

Espaces affines euclidiens. Distance de deux points. Inégalité triangulaire.
Groupes des isométries et des déplacements. Génération du groupe des isométries par les réflexions, du groupe des déplacements par les demi-tours en dimension 3.
Décomposition canonique d'une isométrie en $u = t \circ f = f \circ t$ où t est une translation et f une isométrie admettant au moins un point fixe. Application à la classification des isométries en dimension 2 et 3.
Exemples de groupes d'isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers et groupes diédraux. Tétraèdres réguliers, cubes, octaèdres.
Groupe des similitudes.

Géométrie plane

Propriété angulaire du cercle et applications.
Faisceau harmonique de deux droites et de leurs bissectrices.
Géométrie du triangle, éléments remarquables. Exemples de relations métriques et trigonométriques dans le triangle.
Utilisation des nombres complexes : affixe d'un point dans un repère orthonormé direct. Exemples d'applications géométriques (polygones réguliers, géométrie des cercles).
Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical. Orthogonalité entre cercles.

Coniques

Définitions bifocale et par foyer et directrice. Classification par l'excentricité. Équations réduites. Image par une application affine et classification en les trois genres affines : ellipse, parabole, hyperbole. Exemples de propriétés géométriques communes ou spécifiques à chaque genre.
Section plane d'un cône de révolution.
Trajectoire parabolique d'un objet pesant. Mouvement à accélération centrale. Mouvement des planètes.

3.3.9 Propriétés affines et métriques

Pour toutes les situations géométriques, on réfléchira aux propriétés de caractère affine et à celles de nature métrique (ou euclidienne).
Groupes affines et groupes euclidiens.
Propriétés affines et euclidiennes des coniques.
Notions différentielles de caractère affine et métrique.
Exemples d'utilisation de repères pour traiter des problèmes de géométrie.

3.3.10 Analyse à une variable réelle

Nombres réels ou complexes

Corps $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ des réels et complexes. La construction de $\mathbf{R}$ étant admise. Suites convergentes, divergentes, sous-suites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites. Toute partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes. Droite numérique achevée.
Complétude de $\mathbf{R}$: toute suite de Cauchy de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ on peut extraire une sous-suite convergente.
Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.
Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (u est négligeable devant v), équivalence. Notations $u = \mathcal{O}(v)$ et $u = o(v)$.
Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Récurrences linéaires et homographiques.

Séries de nombres réels ou complexes

Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. Étude de la convergence par les relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes et divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann.
Critères de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.
Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Continuité

Fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$. Limite, continuité à droite et à gauche, continuité.

Théorème des valeurs intermédiaires. Continuité sur un segment, théorème des extrema. Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone f sur un intervalle ; propriétés de la fonction réciproque f^{-1}.
Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass admis).

Dérivabilité

Dérivée à droite et à gauche en un point. Comportement de la dérivation relativement aux opérations algébriques. Dérivation d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes. Application au sens de variation et au caractère lipschitzien.
Dérivées successives. Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux. Formule de Leibniz pour la dérivée k-ième d'un produit.
Fonctions convexes de classe $\mathscr{C}^1$, convexité de l'épigraphe, croissance de la dérivée, position de la courbe relativement aux cordes et aux tangentes. Cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.
Formules de Taylor avec reste intégral, de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.
Étude locale des fonctions. Conditions nécessaires d'extremum. Développements limités. Opérations sur les développements limités.
Série de Taylor.

Fonctions usuelles

Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances. Équations fonctionnelles caractérisant ces fonctions. Fonctions hyperboliques directes et réciproques.
Fonctions circulaires directes et réciproques.

Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégration par parties, changement de variable, calculs de primitives et d'intégrales.
Convergences en moyenne et en moyenne quadratique pour les suites de fonctions. Comparaison avec la convergence uniforme.

Intégrales sur un segment d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme. Formule de Fubini si le paramètre décrit un segment. Lien avec les intégrales doubles.

Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées sont continues par morceaux sur tout segment contenu dans l'intervalle I de définition.
Intégrale d'une fonction positive. Emploi des relations de comparaison.
Une fonction définie sur I à valeurs complexes est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie.
Les deux théorèmes suivants sont admis :

Théorème de convergence monotone : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions à valeurs positives intégrables convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des intégrales des f_n est majorée, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des $f_{n.}$
Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des $f_{n.}$

Intégrales impropres

Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Intégration par parties. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration de relations de prépondérance et d'équivalence.

Intégrales sur un intervalle quelconque d'une fonction dépendant d'un paramètre

Les deux théorèmes suivants sont admis :
Théorème de continuité : Soit f une fonction continue de deux variables (x, t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X. Si le module de $f(x, t)$ est majoré par $g(t)$, où g est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est continue sur X.
Théorème de dérivation : Soit f une fonction continue de deux variables (x, t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X et admettant une dérivée partielle f'_x par rapport à x. Si le module de $f'_x(x, t)$ est majoré par $h(t)$, où h est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est dérivable sur X et sa dérivée est l'intégrale de f'_x par rapport à t.
Exemples de fonctions définies par une intégrale (fonction Gamma d'Euler, transformée de Fourier).

Analyse numérique

Approximations d'un nombre par des suites : rapidité de convergence, ordre d'un algorithme. Accélération de la convergence, méthode de Richardson-Romberg.
Approximation d'une solution d'équation $f(x) = 0$. Méthode de dichotomie. Approximations successives, méthode de Newton. Estimation de l'erreur.
Valeurs approchées d'une intégrale : méthode du point milieu, des trapèzes, de Simpson. Estimation de l'erreur.
Évaluation asymptotique du reste d'une série convergente ; recherche d'une valeur approchée de la somme d'une telle série.
Solutions approchées d'une équation différentielle $x' = f(t, x)$ par la méthode d'Euler.

3.3.11 Analyse à une variable complexe

Séries entières

Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Convergence normale sur tout compact du disque ouvert de convergence. Exemples de calcul du rayon de convergence. Rayon de convergence de la série dérivée.
Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence. Dérivation par rapport à la variable complexe sur ce disque ouvert.

Extension à C des fonctions usuelles

Exponentielle complexe, exponentielle d'une somme, nombre π, fonctions sinus et cosinus.
Application à la mesure des angles.

3.3.12 Analyse fonctionnelle et vocabulaire de la topologie

Topologie et espaces métriques

Distance, boules ouvertes et fermées. Parties ouvertes et fermées. Voisinages. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Distance à une partie, diamètre d'une partie. Parties denses, points isolés, points d'accumulation. Produits finis d'espaces métriques.
Suites, limites, valeurs d'adhérence, sous-suites, suites de Cauchy. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
Continuité d'une application en un point, caractérisation par les suites. Continuité sur l'espace entier, caractérisation par les images réciproques des ouverts et fermés. Homéomorphismes. Applications uniformément continues. Algèbre des fonctions numériques continues.

Espaces vectoriels normés sur R ou C

Normes. Distance associée à une norme. Normes équivalentes. Continuité des opérations. Applications linéaires continues, normes de ces applications.

Espaces métriques compacts

Définition séquentielle. Parties compactes d'un compact. Parties compactes de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts. Parties compactes de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$.
Image continue d'un compact. Théorème de Heine de continuité uniforme des applications continues.

Espaces métriques connexes

Définitions. Parties connexes. Union de parties connexes d'intersection non vide. Parties connexes de $\mathbf{R}$. Image continue d'un connexe. Théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs : elle implique la connexité et lui équivaut sur un ouvert d'un espace vectoriel normé.

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème d'équivalence des normes. Les parties compactes sont les fermés bornés. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires en dimension finie.
Exponentielle d'un endomorphisme.

Espaces métriques complets

Définition. Parties complètes d'un espace complet. Exemples de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.
Théorème du point fixe pour les contractions d'un espace complet dans lui-même. Application aux approximations successives.
Critère de Cauchy pour l'existence de la limite d'une application en un point.

Espaces de Banach

Définition. Critère de Cauchy pour les séries. L'absolue convergence d'une série implique la convergence. Sous-espaces de Banach.
Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions. Espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach vers un autre.
Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple, uniforme, uniforme sur tout compact. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Critère de Cauchy uniforme. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ simplement convergente et dont la suite des dérivées converge uniformément.
Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergence simple et uniforme. Convergence normale. Critère de Cauchy uniforme. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel.

Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Inégalités de Cauchy-Schwarz. Norme associée. Théorème de Pythagore. Familles orthonormales. Procédé de Schmidt. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.
Exemples de produits scalaires ; exemples de suites de polynômes orthogonaux.

Séries de Fourier

Polynômes trigonométriques, orthogonalité des fonctions $x \mapsto e^{inx}$. Coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$ d'une fonction 2π-périodique f continue par morceaux.
Sommes partielles $S_n(f,x) = \sum_{-n \leqslant k \leqslant n} c_k(f)e^{ikx}$.
Meilleure approximation en moyenne quadratique. Identité de Parseval et convergence en moyenne quadratique si f est continue par morceaux.
Théorèmes de convergence de Dirichlet et Féjer. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

3.3.13 Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$.

Topologie de $\mathbf{R}^n$.

Normes usuelles sur $\mathbf{R}^n$; elles sont équivalentes. Complétion. Parties compactes. Limites et applications continues.

Fonctions différentiables

Dérivée selon un vecteur. Développement limité à l'ordre 1. Différentiabilité en un point. Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Matrices jacobiennes, déterminant jacobien. Différentielle d'une fonction composée.
Définition des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω : l'application associant à un point de Ω sa différentielle est continue.
Théorème admis : pour que f soit de classe $\mathscr{C}^1$, il faut et il suffit que les dérivées partielles soient continues sur Ω.
Composition des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Difféomorphismes. Caractérisation des difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathscr{C}^1$. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Caractérisation des constantes parmi les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert connexe.

Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Théorème de Schwarz pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.
Gradient d'une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$. Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Extrema locaux d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de deux variables en un point où $rt - s^2 \neq 0$.
Exemples de problèmes d'extrema issus de la géométrie.
Théorèmes (admis) d'inversion locale et des fonctions implicites. Application à la caractérisation des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathscr{C}^k$.

Équations différentielles

Systèmes linéaires $X' = A(t)X + B(t)$, où A (resp. B) est une application continue d'un intervalle I dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{C}^n$).
Théorème (admis) d'existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.
Dimension de l'espace vectoriel des solutions. Méthode de la variation des constantes.
Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme, application au problème de Cauchy ; résolution du système $X' = AX$ par diagonalisation ou triangularisation de A ou emploi du théorème de Cayley-Hamilton. Équations linéaires scalaires à coefficients constants. Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène.
Équations linéaires scalaires $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où a, b, c sont continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Système du premier ordre associé, étude du problème de Cauchy ; solution de l'équation sans deuxième membre, méthode de variation des constantes. Résolution lorsqu'une solution de l'équation sans second membre ne s'annulant pas sur I est connue.
Notions sur les équations scalaires non linéaires (écrit seulement).
Solutions d'une équation $x' = f(t,x)$, ou $x'' = f(t,x,x')$, où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$; existence et unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy. Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas $\mathscr{C}^1$.
Exemples d'études qualitatives.
Résolution d'équations à variables séparables et homogènes ; exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction en liaison avec des propriétés d'invariance.
Applications en physique et en géométrie différentielle.

3.3.14 Calcul intégral et probabilités

Intégrales multiples

Tous les théorèmes de ce paragraphe sont admis.
Intégrales curvilignes, longueur d'un arc de courbe, travail d'une force. Intégrales doubles et triples. Linéarité et additivité relativement aux ensembles.
Théorème de Fubini-Tonelli : Si f est une fonction de deux variables continue positive, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.
Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue positive et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.
Théorème de Fubini : Si f est une fonction de deux variables continue de module intégrable, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.
Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.
Extension des théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini au cas de fonctions de n variables.
Applications à des calculs d'intégrales.
Théorème du changement de variables ; passage en coordonnées polaires.
Exemples de calculs d'aires et de volumes.

Modélisation d'une expérience aléatoire

Espace Ω des épreuves (ou des évènements élémentaires) ; tribu (ou σ-algèbre) des évènements ; mesure de probabilité sur cette tribu. Étude d'exemples dans le cas où Ω est fini ou infini dénombrable.

Espace probabilisé

Propriétés d'une probabilité. Probabilité conditionnelle $P_B(A)$ de A sachant B si $P(B)$ est positif. Formule des probabilités composées et formule de Bayes. Indépendance d'un nombre fini d'évènements.

Variables aléatoires réelles

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, on appelle *variable aléatoire réelle* (v.a.r. en abrégé), toute application X de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que l'image réciproque $X^{-1}(I)$ de tout intervalle I de $\mathbf{R}$ appartienne à la tribu $\mathscr{F}$. On admettra que la somme, ou le produit, de v.a.r. est une v.a.r..
On se bornera à l'étude des deux familles suivantes de v.a.r. :
Variables aléatoires réelles discrètes. Une v.a.r. est dite *discrète* si elle prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs. Loi et fonction de répartition d'une v.a.r. discrète. Moments d'une v.a.r. discrète : espérance, variance et écart type. Espérance d'une somme de v.a.r. discrètes. Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbf{N}$. Lois discrètes usuelles : loi de Bernoulli ; loi binomiale ; loi géométrique et loi de Poisson.
Variables aléatoires réelles possédant une loi avec densité. On appelle *densité de probabilité* sur $\mathbf{R}$, toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ intégrable sur $\mathbf{R}$ et d'intégrale égale à 1 (On se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe « Intégration sur un intervalle quelconque »).
Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$. On dit qu'une v.a.r. X possède la loi de densité f, si pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, $P(\{X \in I\}) = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.
Fonction de répartition et moments (espérance, variance et écart type) d'une v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance d'une somme de v.a.r. possédant une densité (résultat admis). Lois usuelles possédant une densité : loi uniforme sur un intervalle borné ; loi exponentielle ; loi normale.
Si X est une v.a.r. de loi de densité f et si Φ est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue par morceaux sur tout segment et telle que la fonction $|\Phi| f$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$, alors on admettra que $\Phi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par : $\mathrm{E}(\Phi(X)) = \int_{\mathbf{R}} \Phi(x) f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vecteurs aléatoires

On dira qu'une application $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans $\mathbf{R}^p$ est un *vecteur aléatoire* si chacune de ses composantes est une v.a.r.. On se limitera aux deux cas suivants :
Vecteurs aléatoires discrets. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans $\mathbf{R}^p$ est dit discret si chacune de ses composantes est une v.a.r. discrète.
Loi d'un vecteur aléatoire X. Indépendance de p v.a.r. discrètes. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. discrètes. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. discrètes indépendantes.
Vecteurs aléatoires possédant une loi avec densité. On appelle *densité de probabilité sur* $\mathbf{R}^p$ toute fonction f de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}_+$, intégrable sur $\mathbf{R}^p$ et d'intégrale égale à 1 (on se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe « Intégrales multiples »). Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}^p$. On dit qu'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ possède la loi de densité f si on a, pour tous

intervalles $I_1, \dots, I_p$ de $\mathbf{R}$,

$$P(\{X_1 \in I_1\} \cap \dots \cap \{X_p \in I_p\}) = \int_{I_1} \dots \int_{I_p} f(x_1, \dots, x_p)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_p\,.$$

Soit $X = (X_1, \dots, X_p)$ un vecteur aléatoire de loi de densité f. Soit Ψ un produit d'une fonction continue de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$ par une fonction indicatrice d'un domaine « géométriquement simple » de $\mathbf{R}^p$ et telle que la fonction $|\Psi| f$ soit intégrable sur $\mathbf{R}^p$. On admettra que $\Psi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par :

$$\mathrm{E}(\Psi(X)) = \int_{\mathbf{R}} \dots \int_{\mathbf{R}} \Psi(x_1, \dots, x_p) f(x_1, \dots, x_p)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_p\,.$$

Indépendance de p v.a.r. possédant une loi avec densité. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. indépendantes et possédant une loi avec densité. Loi normale.

Théorèmes limites

Suites de v.a.r. indépendantes. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grands nombres.

Les résultats suivants sont admis : Loi forte des grands nombres pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées possédant une espérance. Théorème central limite pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées et de variance finie.
Approximations de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi normale (loi de Gauss).

3.3.15 Géométrie différentielle

Les notions qui suivent doivent être illustrées par des exemples.

Courbes paramétrées en dimension 2 et 3

Étude locale d'une courbe paramétrée du plan. Changement birégulier de paramètre. Tangente, concavité, forme d'un arc au voisinage d'un point régulier ou singulier. Construction d'une courbe en coordonnées polaires.
Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace. plan osculateur.

Propriétés métriques des courbes

Longueur d'un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$. Abscisse curviligne.
En dimension 2, repère de Frenet. Courbure, centre de courbure.
En dimension 3, repère de Frenet, courbure, torsion.

Cinématique

Vitesse, accélération. Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, circulaires, à accélération centrale. Oscillateurs harmoniques. Exemples de problèmes de mécanique (pendule, chute des corps, mouvements des planètes).

3.4 Seconde épreuve orale

La seconde épreuve orale, dite d'exemples et exercices, repose sur les programmes détaillés dans les parties 3.2 et 3.3. Au cours de cette épreuve, le candidat présentera un choix d'exemples ou d'exercices dont l'un pourra intégrer soit une activité de programmation simple (voir notamment 3.3.2) soit faire appel à un outil logiciel. Il est précisé que le matériel informatique mis à la disposition des candidats pendant le temps de préparation fonctionnera sous le système Linux, et comportera les logiciels de la liste suivante :

3.4.1 Langages et environnements de programmation

- Free Pascal version 2.2, environnement de programmation FP (ou Lazarus)
- Python version 2.6, environnement de programmation Eric

3.4.2 Logiciels

- Cabri® II Plus(Cabrilog)
- Cabri® 3D (Cabrilog)
- CaRMetal version 2.9 ou plus
- ClassPad Manager version 3.0 (CASIO®)
- Geogebra version 3.0 ou plus
- Geoplan / Geospace (avec nombres complexes)
- Maple® version 12 (MapleSoft)
- Maxima version 5.17 ou plus
- OpenOffice.org version 3 ou plus
- Scilab version 5.1 ou plus
- TI-Nspire™CAS (Texas Instruments Education)
- Xcas version 0.8 ou plus

Chapitre 4

Rapport sur les épreuves écrites

4.1 Première épreuve écrite

4.1.1 Énonce de la première épreuve écrite

– NOTATIONS –

- n désigne un entier naturel non nul.
- $[n]$ désigne l'ensemble des n premiers entiers non nuls.
- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels. et $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.
- $\mathcal{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients complexes. Son élément neutre pour la multiplication, la matrice identité, est notée $\mathbf{1}_n$.
- $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont des nombres réels positifs.
- $\mathcal{P}_n^{>0}$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont des nombres réels strictement positifs.
- $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont des nombres réels positifs et dont les sommes des coefficients de chaque ligne sont égales à 1, c'est à dire le sous-ensemble de $\mathcal{P}_n$ formé par les matrices $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ telles que : $\forall i \in [n], \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
- Soient x et y deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$. On note $x \leqslant y$ si, pour tout i dans $[n]$, $x_i \leqslant y_i$.
- Soient $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ dans $\mathcal{P}_n$. On note $A \leqslant B$ si, pour tous entiers i et j dans $[n]$, on a $a_{i,j} \leqslant b_{i,j}$.

Dans les espaces vectoriels de dimension finie considérés dans ce problème, la notion de limite est relative à l'unique topologie associée à une norme arbitraire sur ces espaces.

– PRÉLIMINAIRES –

Soient $t_1, \dots, t_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes tels que :

$$\begin{cases} \forall i \in [n],\ |z_i| \leqslant 1, \\ \\ |\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i z_i| = 1. \end{cases}$$

On se propose de démontrer qu'il existe un nombre complexe z de module 1 tel que, pour tout i dans $[n]$, on ait $z_i = z$.

1. Dans le cas particulier où $z_1, \dots, z_n$ sont des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i z_i = 1$, démontrer que, pour tout i dans $[n]$, on a $z_i = 1$.

2. Démontrer le cas général (*Indication : on pourra, en posant* $Z = \sum_{i=1}^{n} t_i z_i$, *considérer la partie réelle du nombre complexe* $\sum_{i=1}^{n} t_i z_i / Z$ *.*)

– PARTIE I –

Dans cette partie, on suppose $n = 2$.

Soient x, y deux nombres réels ; on pose

$$P_{x,y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-x & 1+x \\ 1+y & 1-y \end{pmatrix} .$$

1. Déterminer les valeurs propres de $P_{x,y}$ et, pour chaque valeur propre, son sous-espace propre associé. Pour quelles valeurs de (x, y), la matrice $P_{x,y}$ est-elle diagonalisable ?

2. On suppose désormais $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$.

(a) Démontrer qu'il existe un nombre réel u tel que $-1 < u < 1$ et une matrice inversible U tels que

$$P_{x,y} = U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} U .$$

(b) En déduire que la suite $(P_{x,y}^k)_{k \in \mathbf{N}}$ admet une limite quand k tend vers $+\infty$. Cette limite est notée L. Quel est le rang de L ?

(c) Démontrer que

$$L = \frac{1}{2+y+x} \begin{pmatrix} 1+y & 1+x \\ 1+y & 1+x \end{pmatrix} .$$

Soit A une matrice dans $\mathcal{P}_2^{>0}$. On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

3. Exprimer le discriminant Δ_A du polynôme caractéristique de la matrice A en fonction de a, b, c, d.

4. Démontrer l'inégalité $\Delta_A > 0$.

5. En déduire que A possède deux valeurs propres réelles distinctes. En notant λ_1, λ_2 ces deux valeurs propres numérotées de façon à avoir $\lambda_1 > \lambda_2$, démontrer l'inégalité $\lambda_1 > |\lambda_2|$.

6. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ admette une limite lorsque k tend vers $+\infty$. Dans le cas où cette limite existe et n'est pas nulle, que peut-on dire de son rang ? Proposer une méthode pour calculer cette limite.

7. Soient λ_1 et λ_2 deux nombres réels tels que $\lambda_1 > |\lambda_2|$. Exhiber une matrice A dans $\mathcal{P}_2^{>0}$ dont les valeurs propres sont λ_1 et λ_2 (*Indication : on pourra commencer par traiter le cas* $\lambda_1 = 1$).

– PARTIE II –

Les matrices de $\mathcal{M}_n$ sont considérées comme des endomorphismes de $\mathbf{C}^n$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$; on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A, c'est-à-dire le maximum des modules des valeurs propres de A. Si x est un vecteur de $\mathbf{C}^n$, on notera Ax l'image du vecteur x par l'endomorphisme défini par la matrice A.

II A : On se propose de démontrer l'équivalence :

$$\rho(A) < 1 \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} A^k = 0 .$$

1. Soit β un nombre complexe tel que $|\beta| < 1$. Soit B une matrice nilpotente dans $\mathcal{M}_n$, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel $\ell \geqslant 1$ tel que $B^\ell = 0$; soit C la matrice $\beta\mathbf{1}_n + B$.

- **(a)** Pour tout entier $k \geqslant \ell$, exprimer C^k en fonction de $\mathbf{1}_n, B, \dots, B^{\ell-1}$.
- **(b)** En déduire que la suite $(C^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

2. Soit A dans $\mathcal{M}_n$.

- **(a)** Soit α une valeur propre de A. On pose $F_\alpha = \cup_{k\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker}(A - \alpha\mathbf{1}_n)^k$.
  - i. Justifier que F_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ et que $A(F_\alpha) \subset F_\alpha$.
  - ii. Soit A_α l'endomorphisme de F_α défini par $A_\alpha(x) = Ax$, pour $x \in F_\alpha$. Dans le cas où $|\alpha| < 1$, démontrer que la suite $(A_\alpha^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.
- **(b)** On suppose $\rho(A) < 1$. Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.
- **(c)** Réciproquement, si la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, montrer que le module de toute valeur propre de A est strictement inférieur à 1.

II B :

1. Soit I_A l'ensemble formé par les nombres réels strictement positifs γ tels que la suite $\left((A/\gamma)^k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ tende vers 0. Démontrer que I_A est l'intervalle $]\rho(A), +\infty[$.

2. On suppose que A admet la valeur propre 1 et qu'il existe deux vecteurs x et y non nuls tels que $Ax = x$ et $Ay = y + x$. Démontrer que la suite $(A^k y)_{k\in\mathbf{N}}$ n'est contenue dans aucune partie compacte de $\mathbf{C}^n$.

3. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ a pour limite une matrice B non nulle.

- **(a)** Démontrer que $\rho(A) = 1$.
- **(b)** Soit α une valeur propre de module 1 de A. Démontrer que la suite $(\alpha^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{C}$ et en déduire que $\alpha = 1$.
- **(c)** Démontrer que le sous-espace vectoriel F_1 défini à la question IIA2(a) est égal à $\operatorname{Ker}(A - \mathbf{1}_n)$.

– PARTIE III –

Dans la suite du problème, on fait les conventions suivantes :
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ dans $\mathcal{M}_n$. Si x est un vecteur de $\mathbf{C}^n$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$, les coordonnées du vecteur Ax sont notées $((Ax)_1, \dots, (Ax)_n)$; autrement dit, pour tout entier i dans $[n]$,

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j .$$

On note w le vecteur de $\mathbf{C}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

1. Soit $A \in \mathcal{P}_n$. Démontrer que A appartient à $\mathcal{S}_n$ si et seulement si $Aw = w$.

2. Soient A et B dans $\mathcal{P}_n$ (respectivement $\mathcal{S}_n$). Démontrer que AB est dans $\mathcal{P}_n$ (respectivement $\mathcal{S}_n$).

3. Soit $A \in \mathcal{S}_n$.

(a) Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble formé par les vecteurs v de coordonnées $(v_1, \ldots, v_n)$ tels que, pour tout i dans $[n]$, $|v_i| \leqslant 1$. Démontrer que $\mathcal{B}$ est conservé par A.

(b) En déduire que $\rho(A) = 1$.

4. Soit A dans $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$.

(a) Soit $v = (v_1, \ldots, v_n)$ un vecteur propre associé à une valeur propre α de module 1 de A. Démontrer que les coordonnées de v sont égales et déterminer α. (*Indication : on pourra utiliser une égalité* $1 = |\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{v_j}{v_i}|$ *pour* v_i *non nul convenablement choisi.*)

(b) Soit v un vecteur de $\mathcal{B}$ tel qu'il existe μ dans $\mathbf{C}$ tel que $Av = v + \mu w$. En considérant la suite $(A^k v)_{k \in \mathbf{N}}$, démontrer que $\mu = 0$.

(c) Démontrer que 1 est une racine simple du polynôme caractéristique de A.

(d) Démontrer qu'il existe une matrice U inversible et une matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}$ telles que $\rho(B) < 1$ et

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} U .$$

(e) En déduire que la suite $(A^k)_{k \in \mathbf{N}}$ admet une limite quand k tend vers $+\infty$. Cette limite est notée L. Quel est le rang de L ?

(f) Démontrer que la limite L de la suite $(A^k)_{k \in \mathbf{N}}$ s'écrit :

$$L = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} .$$

où $u_1, \ldots, u_n$ sont des nombres réels strictement positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$.

(g) Démontrer que Ker $({}^t\!A - \mathbf{1}_n)$ est la droite engendrée par le vecteur de coordonnées $(u_1, \ldots, u_n)$.

(h) Dans le cas particulier où A et ${}^t\!A$ sont toutes deux dans $\mathcal{S}_n$, expliciter L.

5. Soit A dans $\mathcal{S}_n$.

(a) Démontrer que A est la limite d'une suite de matrices de $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$. (*Indication : on pourra remarquer que si* A *et* B *sont dans* $\mathcal{S}_n$ *et si* t *est un nombre réel dans* $[0, 1]$, $tA + (1-t)B$ *est dans* $\mathcal{S}_n$.)

(b) En déduire que ${}^t\!A$ admet un vecteur propre relatif à la valeur propre 1 dont toutes les coordonnées sont positives.

(c) Démontrer sur un exemple que 1 n'est pas en général une racine simple du polynôme caractéristique de A.

(d) Démontrer sur un exemple que A peut avoir des valeurs propres de module 1 différentes de 1.

– PARTIE IV –

Dans toute cette partie, on considère une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$, et on suppose que $A \in \mathcal{P}_n^{>0}$.

IV A : On se propose de démontrer que $\rho(A)$ est une valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est une droite engendrée par un vecteur dont les coordonnées sont des nombres réels strictement positifs.

1. Soit x un vecteur non nul de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées sont des nombres réels positifs. Démontrer que les coordonnées du vecteur Ax sont des nombres réels strictement positifs.

2. Soit α un nombre réel. Supposons que, pour tout i dans $[n]$, on ait $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \alpha$. Démontrer que α est une valeur propre de A et que $\alpha = \rho(A)$.

3. Soit B dans $\mathcal{P}_n^{>0}$ telle que $A \leqslant B$.

(a) Pour tout vecteur x de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des nombres réels positifs, démontrer que

$$Ax \leqslant Bx\ .$$

(b) Soit k un entier naturel $\geqslant 2$. Démontrer que $A^k \leqslant B^k$.

(c) En déduire l'inégalité $\rho(A) \leqslant \rho(B)$.

4. On pose $\alpha = \displaystyle\min_{i\in[n]}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j})$. Démontrer que $\alpha \leqslant \rho(A)$. On pourra considérer la matrice $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ telle que, pour tous entiers i et j dans $[n]$,

$$b_{i,j} = \frac{\alpha a_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}}\ .$$

5. On pose $\beta = \displaystyle\max_{i\in[n]}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j})$. Démontrer l'inégalité $\rho(A) \leqslant \beta$.

6. Soit x un vecteur non nul de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des nombres réels strictement positifs. Soient γ et δ deux nombres réels strictement positifs tels que

$$\gamma x \leqslant Ax \leqslant \delta x\ .$$

(a) Soit S la matrice diagonale :

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}.$$

Justifier que S est inversible et déterminer les coefficients de la matrice $S^{-1}AS$.

(b) En déduire les inégalités $\gamma \leqslant \rho(A) \leqslant \delta$.

(c) Démontrer qu'il existe un indice i dans $[n]$ tel que $(Ax)_i \leqslant \rho(A)x_i$.

7. Soit x un vecteur non nul de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des nombres réels strictement positifs. On suppose que $\rho(A)x \leqslant Ax$. Démontrer que $Ax = \rho(A)x$ (*Indication : on pourra considérer le vecteur* $A(Ax - \rho(A)x)$).

8. Soit α une valeur propre de A dont le module est égal à $\rho(A)$. Soit v un vecteur propre associé, de coordonnées $(v_1, \ldots, v_n)$, et soit x le vecteur de coordonnées $(|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|)$.

(a) Démontrer que x est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$.

(b) Démontrer que toutes les coordonnées de x sont strictement positives.

(c) En utilisant la matrice S définie dans la question IVA6a associée à ce vecteur x, démontrer qu'il existe une matrice U inversible et une matrice B telles que $\rho(B) < \rho(A)$ et

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} U .$$

IV B : On étudie le comportement de la suite $(A^k)_{k \in \mathbf{N}}$.

1. Démontrer qu'il existe un unique vecteur y de $\mathbf{C}^n$ ayant pour coordonnées des nombres réels strictement positifs dont la somme est égale à 1 et tel que $Ay = \rho(A)y$. De même, démontrer qu'il existe un unique vecteur z de $\mathbf{C}^n$ ayant pour coordonnées des nombres réels strictement positifs dont la somme est égale à 1 et tel que ${}^tAz = \rho(A)z$.

2. On suppose $\rho(A) = 1$. Démontrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers la matrice L,

$$L = (y_i z_j)_{(i,j) \in [n] \times [n]},$$

où $(y_1, \ldots, y_n)$ et $(z_1, \ldots, z_n)$ sont respectivement les coordonnées des vecteurs y et z de la question IVB1.

3. On suppose $\rho(A) > 1$. Pour tout entier naturel k, on note $A^k = (a_{i,j}^{(k)})_{(i,j) \in [n] \times [n]}$. Pour tout i et j dans $[n]$, démontrer que la suite $(a_{i,j}^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

– PARTIE V –

Dans cette partie, on prend $n = 3$.
Pour toute matrice B dans $\mathcal{M}_3$, $\mathrm{Tr}\,(B)$ désigne la trace de la matrice B, somme de ses coefficients diagonaux.
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [3] \times [3]} \in \mathcal{P}_3^{>0}$. On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les trois valeurs propres complexes de A, distinctes ou confondues, numérotées de telle façon que $\alpha_1 = \rho(A)$.

1. Démontrer les inégalités $\mathrm{Tr}\,(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}\,(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$. En déduire l'inégalité $3\,\mathrm{Tr}\,(A^2) > \mathrm{Tr}\,(A)^2$.

2. Exprimer $\mathrm{Tr}\,(A)$ et $\mathrm{Tr}\,(A^2)$ en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

3. On suppose que l'on a $\alpha_1 = 1$ et que α_2 et α_3 sont deux nombres complexes conjugués $\alpha_2 = re^{it}$ et $\alpha_3 = re^{-it}$ où t et r sont des nombres réels et $0 \leqslant r < 1$.

(a) Démontrer l'égalité $3\,\mathrm{Tr}\,(A^2) - \mathrm{Tr}\,(A)^2 = 2(1 - 2r\cos(t + \frac{\pi}{3}))(1 - 2r\cos(t - \frac{\pi}{3}))$.

(b) En déduire que α_2 est à l'intérieur d'un triangle inscrit sur le cercle unité ; préciser la nature et les sommets de ce triangle.

4. Réciproquement, posons $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = re^{it}$ et $\alpha_3 = re^{-it}$, où t et r sont des nombres réels et $0 \leqslant r < 1$. On suppose que α_2 est à l'intérieur du triangle trouvé à la question V3. Démontrer que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les valeurs propres d'une matrice de $\mathcal{P}_3^{>0}$. *Indication : On pourra considérer la matrice :*

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2r\cos(t) & 1 - 2r\cos(t + \frac{\pi}{3}) & 1 - 2r\cos(t - \frac{\pi}{3}) \\ 1 - 2r\cos(t - \frac{\pi}{3}) & 1 + 2r\cos(t) & 1 - 2r\cos(t + \frac{\pi}{3}) \\ 1 - 2r\cos(t + \frac{\pi}{3}) & 1 - 2r\cos(t - \frac{\pi}{3}) & 1 + 2r\cos(t) \end{pmatrix} .$$

5. On admet que, si α_1, α_2 et α_3 sont trois nombres réels qui satisfont aux conditions

$$\alpha_1 = 1,\ |\alpha_2| < 1,\ |\alpha_3| < 1,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > 0,$$

il existe une matrice A dans $\mathcal{P}_3^{>0}$ dont les valeurs propres sont α_1, α_2 et α_3.
Compte tenu de cela et des questions précédentes, décrire l'ensemble $\mathcal{S}$ formé par les triplets $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de $\mathbf{C}^3$ tels qu'il existe une matrice A dans $\mathcal{P}_3^{>0}$ dont les trois valeurs propres complexes distinctes ou confondues, sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, numérotées de telle façon que $\alpha_1 = \rho(A)$.

——— FIN DU SUJET ———

4.1.2 Commentaires sur la première épreuve écrite

Présentation
Le problème proposait une démonstration du théorème de Perron-Frobenius dans le cas particulier d'une matrice dont les coefficients sont strictement positifs et étudiait le problème inverse (quelle famille de nombres complexes peut être la famille des valeurs propres d'une matrice à coefficients strictement positifs ?) dans les cas très simples de la dimension 2 et 3.
Les préliminaires étaient consacrés au cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. La partie I était consacrée au cas de la dimension 2 où les objectifs du problème sont faciles à obtenir, les valeurs propres s'exprimant simplement en fonction des coefficients de la matrice. La partie II caractérisait les matrices A dont la suite des puissances $\{A^k\}_{(k\in\mathbf{N})}$ converge vers la matrice nulle selon leur rayon spectral. La partie III étudiait le cas des matrices stochastiques, pour lesquelles le théorème de Perron-Frobenius est facile. Ce résultat était alors généralisé dans la partie IV. La partie V était consacrée au problème inverse en dimension 3.

Signalons que l'énoncé du problème comportait une inexactitude et une erreur. Dans la partie IVA, question 7, il n'y avait pas lieu de supposer le vecteur x strictement positif, mais simplement de le supposer positif et non nul. Dans la partie IVB, question 2, l'hypothèse correcte sur les vecteurs propres y et z respectifs des matrices A et ${}^tA$ est que leur produit scalaire est égal à 1 et non que les sommes de leurs coordonnées respectives valent 1. Les candidats n'ont pas abordé ces questions.

Préliminaires. Parmi ceux qui ont voulu raisonner par l'absurde, beaucoup d'erreurs dans la négation logique du résultat à démontrer.

Partie I.
La partie I a été traitée presque intégralement dans la plupart des copies. Hormis les erreurs de calcul, on constate à nouveau des erreurs de logique dans les disjonctions de cas (I1 et I7), des confusions entre les conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité, voire une méconnaissance de ces conditions (on rappelle à ce propos qu'aucune condition de diagonalisabilité ne repose sur la nullité ou non d'un déterminant). Signalons aussi les points précis :

- il n'est pas vrai en général que la matrice M et la matrice $2M$ aient les mêmes valeurs propres (c'est seulement le cas pour les matrice nilpotentes).
- Dans les questions I2b et I7, le fait que la convergence de la suite $(D_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vers une matrice D entraîne la convergence de la suite $(PD_kP^{-1})_{k\in\mathbf{N}}$ vers la matrice PDP^{-1} fut rarement justifié. Il convenait d'invoquer la continuité de l'application $M \to PMP^{-1}$ sur $\mathscr{M}_n(K)$.
- Dans la question I7, la méthode de calcul de la limite L fut rarement abordée, et quand ce fut le cas il fallait encore mentionner le fait que les valeurs propres sont calculables à partir de la donnée de la matrice $(2, 2)$ (ce serait faux en général, dans des dimensions supérieures).

Partie II.
La partie IIA a montré une méconnaissance du lemme de décomposition des noyaux et une confusion entre sous-espaces caractéristiques et sous-espaces propres d'un endomorphisme.
La partie IIB fut moins abordée. Signalons aussi les points précis :

A1a Pour appliquer la formule du binôme à deux éléments, il est nécessaire qu'ils commutent. Il faut donc le justifier.

A1b Il ne suffisait pas de remarquer que la suite $(\beta^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 ; on devait aussi s'occuper de la suite $(\binom{k}{i}\beta^k)_{k\in\mathbf{N}}$ (une majoration grossière du coefficient $\binom{k}{i}$ par $k!$ ne suffisait pas pour conclure).

A1c Il n'est pas vrai en général qu'une réunion de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. C'est cependant vrai lorsque la réunion est croissante, ce qui était le cas.

B1 Il fallait justifier le fait que le rayon spectral de la matrice A/α est $\rho(A)/\alpha$.

B3b Il fallait justifier précisément le fait que si un nombre complexe α de module 1 est tel que la suite $(\alpha^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge, alors $\alpha = 1$.

Parties III, IV et V.
Dans ces parties, seules les questions très faciles de début de partie ont été le plus souvent abordées.

4.2 Deuxième épreuve écrite

4.2.1 Énoncé de la deuxième épreuve écrite

– NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES –

- On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.
- Si f est une fonction dérivable sur un intervalle de $\mathbf{R}$, on note indifféremment f' ou $\mathrm{D}(f)$ ou simplement $\mathrm{D}f$ sa fonction dérivée. De même, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1, on note $\mathrm{D}^n f$ sa fonction dérivée $n^{\text{ème}}$. On convient de poser $\mathrm{D}^0 f = f$.
- On désigne par $\mathcal{L}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes et bornées sur $\mathbf{R}$. Pour $f \in \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$.
- On désigne par $\mathcal{L}^1$ l'espace vectoriel des fonctions f continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes et intégrables sur $\mathbf{R}$. Pour toute fonction f de $\mathcal{L}^1$, on écrira indifféremment $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_{\mathbf{R}} f$ pour désigner $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. On définit une norme sur cet espace en posant $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
- On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ si elle dérivable en tout point de $\mathbf{R}$ et si sa dérivée f' est une fonction continue.
- Les espaces vectoriels $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont définis au début des parties III et IV de cet énoncé.

Les candidats sont invités à énoncer précisément les théorèmes d'intégration qu'ils comptent appliquer. Ils pourront éventuellement utiliser le résultat suivant qui sera admis :

Soit une fonction u continue sur $\mathbf{R}^2$ et telle que :

1. *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $y \mapsto u(x,y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, et*

2. *la fonction $x \mapsto \int_{\mathbf{R}} |u(x,y)|\,\mathrm{d}y$ est continue et intégrable sur $\mathbf{R}$, et*

3. *la fonction* $x \mapsto \int_{\mathbf{R}} u(x,y)\,\mathrm{d}y$ *est continue sur* $\mathbf{R}$*, et*

4. *pour tout* $y \in \mathbf{R}$*, la fonction* $x \mapsto u(x,y)$ *est intégrable sur* $\mathbf{R}$*, et*

5. *la fonction* $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} |u(x,y)|\,\mathrm{d}x$ *est continue sur* $\mathbf{R}$*, et*

6. *la fonction* $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} u(x,y)\,\mathrm{d}x$ *est continue sur* $\mathbf{R}$.

Alors u *est intégrable sur* $\mathbf{R}^2$ *; de plus, la fonction* $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} u(x,y)\,\mathrm{d}x$ *est intégrable sur* $\mathbf{R}$ *et on a*

$$\iint_{\mathbf{R}^2} u = \int_{\mathbf{R}} \Big(\int_{\mathbf{R}} u(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbf{R}} \Big(\int_{\mathbf{R}} u(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y\,.$$

Les quatre parties s'enchaînent logiquement. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats établis dans les questions antérieures.

– Partie I : Transformation de Fourier –

1. Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1$.

(a) Démontrer que, pour tout ξ appartenant à $\mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

(b) On définit alors une nouvelle fonction, notée $\widehat{f}$, en posant pour tout $\xi \in \mathbf{R}$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x$$

Démontrer que la fonction $\widehat{f}$ est continue, bornée et que l'on a $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

La fonction $\widehat{f}$ est appelée *transformée de Fourier* de la fonction f et est notée indifféremment $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}f$. On pourra ainsi considérer $\mathcal{F}$ comme une application de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{L}^\infty$.

2. Soient a un nombre réel strictement positif et φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$. Vérifier que la fonction φ appartient à $\mathcal{L}^1$ et calculer sa transformée de Fourier.

3. Soient f et g deux fonctions appartenant à $\mathcal{L}^1$. Démontrer que l'on a $\int_{\mathbf{R}} f\widehat{g} \;=\; \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}g$.

4. Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1$ et telle la fonction $t \mapsto t \times f(t)$, notée xf, appartienne à $\mathcal{L}^1$. Démontrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et que $\mathrm{D}(\mathcal{F}f) \;=\; \mathcal{F}(-2\mathrm{i}\pi xf)$.

5. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ et telle que f et $\mathrm{D}f$ appartiennent à $\mathcal{L}^1$.

(a) Démontrer que f admet des limites nulles au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

(b) En déduire que pour tout ξ appartenant à $\mathbf{R}$ on a $\mathcal{F}(\mathrm{D}f)(\xi) \;=\; (2\mathrm{i}\pi\xi)\mathcal{F}f(\xi)$.

6. **Calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne.**
On considère la fonction γ définie sur $\mathbf{R}$ par $\gamma(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$.

(a) Justifier le fait que γ est intégrable sur $\mathbf{R}$. *On admettra que* $\int_{\mathbf{R}} \gamma = 1$.

(b) Pour tout ξ appartenant à $\mathbf{R}$, on note $\Omega(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi)^2}\,\mathrm{d}x$. Démontrer que la fonction Ω est constante. *Indication :* On pourra dériver la fonction Ω, ou bien intégrer suivant un chemin convenable dans le plan complexe.

(c) En déduire que $\mathcal{F}\gamma = \gamma$.

(d) Soit a un nombre réel strictement positif. Soit la fonction γ^a définie par $\gamma^a(x) = \gamma(ax)$; exprimer la transformée de Fourier de γ^a en fonction de $\gamma^{\frac{1}{a}}$.

– Partie II : Convolution –

1. On considère deux fonctions f et g continues sur $\mathbf{R}$ et à valeurs complexes. Démontrer que si f et g vérifient l'hypothèse

$$\text{(H1)} \qquad f \text{ appartient à } \mathcal{L}^\infty \text{ et } g \text{ appartient à } \mathcal{L}^1$$

alors la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.
Démontrer que ce résultat est encore vrai si f et g vérifient l'hypothèse

$$\text{(H2)} \qquad f \text{ appartient à } \mathcal{L}^1 \text{ et } g \text{ appartient à } \mathcal{L}^\infty.$$

Lorsque l'une au moins des deux hypothèses précédentes est vérifiée, on définit la fonction $f * g$ par $f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ pour tout nombre x réel.
Cette fonction s'appelle le *produit de convolution de f et de g.*

2. Démontrer, sous l'hypothèse (H1), que $f * g = g * f$. Dans toute la suite, l'expression $f * g$ sera utilisée en supposant que l'une des deux fonctions appartient à $\mathcal{L}^1$ et l'autre à $\mathcal{L}^\infty$ (hypothèses (H1) ou (H2)).
Démontrer, sous l'hypothèse (H1), que $f * g$ appartient à $\mathcal{L}^\infty$ et que $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1$.

3. On suppose dans cette question que f et g vérifient l'hypothèse (H1) et que, de plus, f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\mathrm{D}f$ appartient à $\mathcal{L}^\infty$.
Démontrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et que $\mathrm{D}(f * g) = \mathrm{D}f * g$.

4. On suppose que f et g appartiennent à $\mathcal{L}^1$ et que l'une au moins des deux fonctions appartient à $\mathcal{L}^\infty$.

(a) Démontrer que $f * g$ est dans $\mathcal{L}^1$ et que $\int_{\mathbf{R}} f * g = \int_{\mathbf{R}} f \times \int_{\mathbf{R}} g$.

(b) Montrer que $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \times \mathcal{F}g$.

5. Soit θ une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1$ et telle que $\int_{\mathbf{R}} \theta(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Pour tout nombre $\varepsilon \in]0,1[$ on définit la fonction θ_ε par la formule $\theta_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\theta(\dfrac{x}{\varepsilon})$, x étant un nombre réel quelconque.
Soit J un segment de $\mathbf{R}$.
Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{L}^\infty$, on veut démontrer que $f * \theta_\varepsilon$ converge vers f uniformément sur J quand ε tend vers zéro, c'est-à-dire que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\sup_{x \in J} |f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)| \Big) \ = \ 0 \ .$$

(a) Soit un nombre $\delta > 0$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $A > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{A} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{A}^{\infty} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x < \delta\ .$$

(b) Démontrer, pour tout x réel fixé, que $|f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)| \leqslant \int_{\mathbf{R}} |f(x-\varepsilon y) - f(x)||\theta(y)|\,\mathrm{d}y$.

(c) En déduire que

$$\sup_{x\in J} |f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)| \leqslant 2\delta\|f\|_\infty \ + \ \int_{-A}^{A} |\theta(y)| \sup_{x\in J} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|\,\mathrm{d}y\ .$$

(d) Conclure en utilisant la continuité de f sur un compact convenablement choisi.

6. Théorème d'inversion de Fourier.

(a) Soit $x \in \mathbf{R}$ (x fixé). Soit $\varepsilon > 0$, et soit Φ_ε la fonction définie par $\Phi_\varepsilon(\xi) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x\xi - \pi\varepsilon^2\xi^2}$ pour tout ξ appartenant à $\mathbf{R}$. Vérifier que cette fonction appartient à $\mathcal{L}^1$ et exprimer sa transformée de Fourier à l'aide de la fonction γ_ε définie par $\gamma_\varepsilon(y) = \dfrac{1}{\varepsilon}\gamma(\dfrac{y}{\varepsilon})$ (la fonction γ a été définie en I.6).

(b) Soit une fonction f de l'espace $\mathcal{L}^1$; on note $\mathcal{G}(f)$ la fonction définie par $\mathcal{G}(f)(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$ pour tout ξ appartenant à $\mathbf{R}$; on peut ainsi considérer $\mathcal{G}$ comme une application de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{L}^\infty$.
On suppose que f est aussi dans $\mathcal{L}^\infty$ et que $\mathcal{F}f$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.
Démontrer alors que $f = \mathcal{G}(\widehat{f})$.
Indication : on pourra écrire $\int_{\mathbf{R}} \Phi_\varepsilon(\xi)\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbf{R}} \widehat{\Phi_\varepsilon}(y)f(y)\,\mathrm{d}y$, puis faire tendre ε vers zéro, et utiliser la question II.5.
Dans la suite la transformation $\mathcal{G}$ sera parfois notée $\mathcal{F}^{-1}$.

– Partie III : Espace $\mathcal{S}$ –

On dit qu'une fonction f de variable réelle et à valeurs complexes est *à décroissance rapide* si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour chaque couple d'entiers naturels (α, β) la fonction $x \mapsto x^\alpha \mathrm{D}^\beta f(x)$ est bornée sur $\mathbf{R}$ (on rappelle que D^β désigne l'opérateur de dérivation d'ordre bêta).
Pour simplifier les choses, on notera $x^\alpha \mathrm{D}^\beta f$ la fonction $x \mapsto x^\alpha \mathrm{D}^\beta f(x)$.
Enfin, on note $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des fonctions à décroissance rapide.

1. (a) Démontrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$ et pour tous entiers naturels m, α, β, la fonction $x \mapsto (1 + |x|^m)x^\alpha(\mathrm{D}^\beta f)(x)$ est bornée sur $\mathbf{R}$.

(b) En déduire que la fonction $x^\alpha \mathrm{D}^\beta f$ appartient à $\mathcal{L}^1$ (en particulier, on a $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1$).

(c) Vérifier que le produit de deux fonctions de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.

2. Topologie de $\mathcal{S}$.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et toute fonction $f \in \mathcal{S}$ on pose

$$p_n(f) \ = \ \max_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant n \\ 0\leqslant\beta\leqslant n}} \big(\sup_{x\in\mathbf{R}} |x|^\alpha |\mathrm{D}^\beta f(x)|\big)\ .$$

(a) Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{S}$. Démontrer l'inégalité $p_n(f+g) \leqslant p_n(f) + p_n(g)$.

(b) On définit une fonction, notée σ, qui à $x \geqslant 0$ associe $\sigma(x) = \dfrac{x}{1+x}$. Démontrer que σ est croissante, bornée et vérifie $\sigma(x+y) \leqslant \sigma(x) + \sigma(y)$ pour tous x, y positifs.

(c) Étant données deux fonctions f, g de $\mathcal{S}$ on pose $d(f,g) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sigma\big(p_n(f-g)\big)$. Démontrer que d est une distance sur $\mathcal{S}$ et que cette distance est invariante par translation.
L'espace $\mathcal{S}$ sera désormais muni de la topologie définie par cette distance.

(d) Démontrer qu'une suite $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathcal{S}$ converge vers 0 (la fonction nulle) pour la topologie définie par la distance d (ce qu'on pourra noter $f_i \underset{\mathcal{S}}{\rightarrow} 0$) si, et seulement si, pour chaque couple $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$ on a

$$\lim_{i \to \infty} \Big(\sup_{x \in \mathbf{R}} |x|^\alpha |(\mathrm{D}^\beta f_i)(x)| \Big) = 0 \, .$$

En déduire que l'application $\mathcal{I} : \begin{cases} f & \mapsto f \\ \mathcal{S} & \to \mathcal{L}^1 \end{cases}$ est continue.

3. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{S}$. Démontrer que $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, puis que $f*g$ appartient à $\mathcal{S}$.

4. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$.

(a) Soit un élément f de $\mathcal{S}$ et un entier α. Démontrer que $\mathrm{D}^\alpha(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}g$, où la fonction g est définie par $g(x) = (-2\mathrm{i}\pi x)^\alpha f(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbf{R}$ (ce qu'on peut aussi écrire à l'aide de la notation introduite en I.4 : $g = (-2\mathrm{i}\pi)^\alpha x^\alpha f$).

(b) Démontrer, pour tout nombre réel ξ, la formule :

$$\mathcal{F}(\mathrm{D}^\alpha f)(\xi) \;=\; (2\mathrm{i}\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}f(\xi) \, .$$

(c) En déduire que si f appartient à $\mathcal{S}$, alors $\widehat{f}$ appartient aussi à $\mathcal{S}$.

(d) Démontrer que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ (toujours au sens de la topologie définie par d).
Par abus de langage, on notera encore $\mathcal{F}$ cette application.

5. Inversion de Fourier dans $\mathcal{S}$.

Démontrer que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ établit une bijection de $\mathcal{S}$ sur lui-même, admettant pour bijection réciproque la restriction de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{S}$.
Par abus de langage, on notera encore, dans ce nouveau contexte, $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}$.

– Partie IV : Espace $\mathcal{S}'$ –

On note $\mathcal{S}'$ le dual topologique de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathbf{C}$ ($\mathcal{S}$ étant muni de la distance d définie au III.2.c).

1. Quelques exemples.

(a) Soit δ la forme linéaire définie par $\delta(f) = f(0)$ pour $f \in \mathcal{S}$. Démontrer que δ appartient à $\mathcal{S}'$.

(b) Soit u une fonction continue par morceaux, intégrable sur $\mathbf{R}$ ou bornée. Démontrer, dans chacun de ces deux cas, que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} uf$ a un sens ; en déduire qu'on définit bien un élément de $\mathcal{S}'$, noté T_u, en posant $T_u(f) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} uf$ pour f appartenant à $\mathcal{S}$.
On utilisera cette notation T_u dans toute la suite du problème.

2. Construction d'opérateurs sur $\mathcal{S}'$.
Pour construire d'autres éléments de $\mathcal{S}'$ on procède de la manière suivante. On se donne tout d'abord une application linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, notée L. On suppose qu'il existe une application linéaire continue L' de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ telle que pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{S}$ on ait $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} L(f)\, g \;=\; \int_{\mathbf{R}} f\, L'(g)$. On admettra que, dans ces conditions, l'application L' est unique.
Enfin, pour tout élément T de $\mathcal{S}'$ on pose $\underline{L}(T) = T \circ L'$.
Justifier le fait que $\underline{L}$ est une application linéaire de $\mathcal{S}'$ dans lui-même.

3. Dérivation dans $\mathcal{S}'$.

(a) On choisit d'abord $L = \mathrm{D}$ (opérateur de dérivation). Vérifier que la question IV.2 s'applique bien à cet opérateur et expliciter L'.

(b) Donner alors l'expression de $\underline{\mathrm{D}}(T)(f)$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$.

(c) On choisit à présent $L = \mathrm{D}^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbf{N}$, $\alpha \geqslant 2$. Expliciter L' et $\underline{L}(T)(f)$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$.

(d) Soit Y la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $Y(x) = 1$ pour $x \geqslant 0$ et $Y(x) = 0$ pour $x < 0$.
Démontrer que $\underline{\mathrm{D}}(T_Y) \;=\; \delta$ (avec les notations δ et T_Y introduites en IV.1).

4. Multiplication par des fonctions dans $\mathcal{S}'$.
On dit qu'une fonction P de classe $\mathcal{C}^\infty$ est *à croissance lente* si pour tout entier $\beta \geqslant 0$ il existe un entier $\alpha \geqslant 0$ et deux nombres réels M et N tels que $|\mathrm{D}^\beta P(x)| \leqslant (M + N|x|^\alpha)$ pour tout x réel.
Soit L l'opérateur défini sur $\mathcal{S}$ par : $L(f)(x) = P(x) \times f(x)$ (avec $f \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbf{R}$).
Démontrer que L satisfait aux hypothèses de la question IV.2, et préciser l'expression de L' et de $\underline{L}(T)(f)$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$.
L'élément $\underline{L}(T)$ de $\mathcal{S}'$ sera noté $P \times T$ dans la suite.

5. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$.

(a) Démontrer que l'application L définie, pour $f \in \mathcal{S}$, par $L(f) = \widehat{f}$ (soit $L = \mathcal{F}$) vérifie les hypothèses de la question IV.2 ; donner l'expression de $\underline{L}(T)(f)$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$.
L'élément $\underline{L}(T)$ de $\mathcal{S}'$ sera noté dans la suite $\widehat{T}$ ou indifféremment $\underline{\mathcal{F}}(T)$.

(b) Donner une définition analogue pour l'application $\underline{\mathcal{G}}$ (voir question II.6), et démontrer que $\underline{\mathcal{G}}$ réalise une bijection de $\mathcal{S}'$ sur lui-même, dont la réciproque est $\underline{\mathcal{F}}$ (voir la question III.5).

(c) On se donne une fonction $u \in \mathcal{L}^1$. Démontrer que l'on a $\underline{\mathcal{F}}(T_u) = T_{\mathcal{F}(u)}$.

(d) Démontrer que $\underline{\mathcal{F}}(\delta) = T_{\mathbf{1}}$, où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1 sur $\mathbf{R}$, puis que $\underline{\mathcal{G}}(\delta) = T_{\mathbf{1}}$.

6. Soit un entier $\alpha \geqslant 0$. On définit deux fonctions P et Q par $P(x) = (-2\mathrm{i}\pi x)^\alpha$ et $Q(x) = (2\mathrm{i}\pi x)^\alpha$ pour tout x réel. Soit T appartenant à $\mathcal{S}'$; démontrer les relations

$$\underline{\mathrm{D}}^\alpha(\underline{\mathcal{F}}(T)) \;=\; \underline{\mathcal{F}}(P \times T) \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{F}}(\underline{\mathrm{D}}^\alpha(T)) \;=\; Q \times \underline{\mathcal{F}}(T)\ .$$

7. Équation différentielle $-\underline{\mathrm{D}}^2 U + U = \delta$.

Chercher, au moyen de la transformation de Fourier et des résultats de la question I.2, quelles sont les solutions $U \in \mathcal{S}'$ de l'équation différentielle $-\underline{\mathrm{D}}^2 U + U = \delta$.

———— FIN DU SUJET ————

4.2.2 Commentaires sur la deuxième épreuve écrite

Le sujet, essentiellement axé sur les théorèmes d'intégration, rendait difficile l'admissibilité pour un candidat qui ne maîtrisait pas du tout le sujet « intégrales dépendant d'un paramètre ». Néanmoins, de nombreux points pouvaient être abordés par tous. Par contre, le manque de familiarité avec les espaces fonctionnels rencontrés a conduit certains à s'essayer à des généralités conférant aux divers espaces des propriétés d'algèbre ou inventant des inclusions entre eux, etc.

La correction des copies a souvent été assez monotone : lorsqu'un théorème n'était pas compris, il donnait lieu à une mauvaise application tout au long de la copie. Cela a conduit parfois à des copies très épaisses, dont les auteurs sont peut-être sortis de l'épreuve assez satisfaits en pensant qu'ils avaient traité de nombreuses questions alors qu'en définitive, ils n'ont obtenu que très peu de points.

Les meilleures notes ont été obtenues par ceux qui traitaient bien les parties I et II (sans nécessairement aller plus loin). Un candidat adroit dans la manipulation des inégalités, sachant montrer qu'une fonction est intégrable, et utiliser le théorème de continuité et surtout de dérivation des intégrales à paramètre, et ayant compris que pour utiliser un théorème comme celui fourni par l'énoncé, il faut en vérifier les hypothèses, celui-là avait toutes les chances d'obtenir une note qui le mette à même d'être admissible.

En général, les copies qui se distinguaient par leur manque de propreté ou leur rédaction déficiente ont été sanctionnées. C'est ainsi que le mauvais usage consistant à écrire des quantificateurs après les propriétés logiques correspondantes, ou encore la confusion systématique entre une fonction f et le scalaire $f(x)$, ont indisposé les correcteurs qui n'ont pas été poussés à l'indulgence face à ce type de présentation. Dans le même ordre d'idées, l'existence des objets manipulés (somme de série, intégrale) a souvent été omise/admise sans précaution particulière. S'agissant d'un concours visant à déceler de réelles compétences mathématiques et didactiques chez des enseignants en exercice, on ne sera pas surpris de l'exigence du jury en cette matière.

Partie I

1a) Un écueil classique : nombre de candidats croient que c'est en majorant la valeur absolue de l'intégrale ou de $\displaystyle\int_{-M}^{M} f(t)\,\mathrm{d}t$ qu'ils prouvent l'intégrabilité. Plus inquiétant est le cas des candidats écrivant qu'il est bien connu que la fonction qui à x associe $e^{-2i\pi xs}$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini donc est intégrable à l'infini et/ou que le produit de deux fonctions intégrables est intégrable, etc. Bon nombre de ces errements reviennent soit à confondre l'intégrabilité en valeur absolue (point de vue du programme et du sujet) avec l'intégrale impropre, soit à prétendre que la fonction constante 1 est intégrable sur $\mathbf{R}$...

(b) Nombre de candidats écrivent essentiellement ceci :

On a $|f(x)e^{-2i\pi xs}| = |f(x)|$ et f est intégrable ; donc la fonction qui à s associe $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-2i\pi xs}\,\mathrm{d}x$ est continue.

Ils oublient ainsi de mettre en valeur le fait essentiel que la fonction « majorante » est indépendante du paramètre s, laissant planer le doute sur leur connaissance du fait que la majoration sert non seulement à obtenir l'intégrabilité de la fonction « majorée » (beaucoup le disent d'ailleurs) mais aussi pour permet le passage à la limite et la régularité. Le doute ne sera plus permis dans la question I6(b).

Les propriétés de continuité ou dérivabilité des intégrales à paramètre sont parfois établies avec l'usage des suites de fonctions, ce qui serait parfait si les propriétés de convergence uniforme nécessaires étaient bien validées, ce qui est loin d'être le cas.

2) La positivité de φ a été souvent oubliée avant le calcul de $\displaystyle\int_A^B e^{-ax}\,\mathrm{d}x$.

3) Ici apparaissait la formule de Fubini. On lit trop souvent la liste des propriétés demandées sans preuve (mais affirmées avec conviction !) pour valider l'usage du théorème. Il était commode de repérer pour les propriétés 2, 3 (ou 5 , 6), que les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} |u(x,y)|\,\mathrm{d}y$ ou $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} u(x,y)\,\mathrm{d}y$ s'écrivent souvent comme produit de fonctions de la variable x dont les propriétés (continuité ou intégrabilité) étaient déjà acquises...

5a) Cette question fut généralement très mal traitée ; bon nombre de candidats croient que $f \in L^1$ entraîne soit que f tend vers 0 (erreur très classique) soit que f est bornée (plus subtil). Il serait bon que les candidats étudient davantage les contre-exemples qui évitent ce genre d'affirmations et développent l'intuition en analyse. Un candidat par ailleurs cultivé a voulu appliquer cela à f' pour obtenir que f était lipschitzienne donc absolument continue.

6a) La phrase « γ est une gaussienne donc est intégrable et son intégrale vaut 1 » ne rapportait rien. Quelques-uns ont tenté de justifier l'intégrabilité de γ par le fait que c'est une fonction décroissante et minorée sur $\mathbf{R}_+$, ce qui revient à nouveau à confondre limite nulle à l'infini et intégrabilité. Enfin, certains candidats furent troublés par la présence de π...

6b) Cette question a posé beaucoup de difficultés aux candidats. Environ une copie sur 40 fait apparaitre une localisation pour avoir un segment et majorer par une fonction de L^1 indépendante de ξ.

Certains ont essayé d'utiliser les questions précédentes mais en oubliant de justifier que $x\gamma$ était intégrable. On a eu la satisfaction de lire dans certaines copies qui avaient pourtant échoué avec le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre dans une question précédente, une preuve élémentaire convenable de la dérivabilité de la fonction Ω en écrivant $\Omega(\xi) = \exp(\pi\xi^2).\hat{\gamma}(\xi)$, puis la nullité de la dérivée obtenue.

La preuve avec le choix d'un chemin a été peu utilisée ; dans ce cas, la nécessité d'un passage à la limite a été très peu vue.

6c) Question majoritairement bien traitée (quitte à admettre la question 6b).

6d) Peu de copies où le changement de variable donne lieu à une justification.

Partie II

4a) La plupart des candidats ne perçoivent pas que l'on utilise la formule de Fubini dès que l'on écrit une intégrable double comme étant $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f * g$. Un seul candidat a regardé $\displaystyle\iint |f(x)|g(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ pour justifier l'intégrabilité de la fonction $f * g$.

On a aussi lu avec étonnement la « formule » suivante :

$$\int_{\mathbf{R}} f(t) \left(\int_{\mathbf{R}} g(x-t)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{\mathbf{R}} g(x-t)\,\mathrm{d}x\right)\,.$$

5a) Peu de candidats ont été finalement gênés par l'erreur de l'énoncé ($\displaystyle\int_{-\infty}^{A}$ au lieu de $\displaystyle\int_{-\infty}^{-A}$) mais tous ne corrigent pas, loin s'en faut.

5b) à d) On attendait ici un argument de continuité uniforme ; même dans les copies qui expriment la nécessité de cette notion en invoquant correctement les notions de continuité et compacité, rares sont celles qui ont fait le choix du bon segment à utiliser. La question 5d a révélé les très bonnes copies.

Partie III

1c) Certains candidats ne connaissent pas la formule de Leibniz et la plupart oublient de justifier que fg est de classe infinie.

2a) Peu de bonnes rédactions ; on a ici souvent un exposé purement « formel » ...
2b) Question élémentaire mais qui a révélé que certains candidats ne connaissent pas la différence entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ (comparer $\sigma(x)$ et $\sigma(x-1)$) ou confondent bornée et majorée....
2c) On ne peut pas dire que la notion de distance soit réellement maîtrisée par l'ensemble des candidats. La proportion de candidats qui ne se posent pas la question de l'existence de d est importante, aussi peut-on féliciter ceux qui pensent à justifier la convergence de la série définissant $d(f,g)$. Il est aussi bon de préciser que la rédaction devait montrer comment se servir des deux questions précédentes et pas se contenter de dire « d'après les questions ».
(d) Abordée seulement par quelques copies ; seul le sens « facile » a été réussi. Clairement, la topologie de S a constitué une réelle difficulté pour les candidats puisque toutes les questions où l'on devait montrer la continuité d'une application définie sur S ont été soit sautées, soit traitées incorrectement.
4) Les candidats qui ont abordé cette question n'ont généralement pas convaincu les correcteurs en invoquant une preuve par récurrence car ils ont oublié de vérifier que les hypothèses qui leur permettaient d'utiliser les résultats des questions $I.4$ et $I.5$ étaient satisfaites.

Partie IV

Peu de candidats ont abordé cette partie, généralement en « oubliant » de montrer la continuité des différents opérateurs L rencontrés qui était le seul point à montrer, la linéarité étant généralement une évidence.

Chapitre 5

Rapport sur les épreuves orales

5.1 Considérations générales

Le présent rapport complète les rapports des sessions 2007 et 2008. Le déroulement des épreuves n'a pas changé en 2009, et les observations et recommandations des précédents rapports sont encore adaptées.
Le jury est, cette année encore, plutôt satisfait de la prestation orale des candidats admissibles et a eu le plaisir d'assister à des « planches » combinant un bon niveau scientifique et un grand souci didactique. Ce constat semble très lié au fait qu'un nombre croissant de candidats ont suivi une préparation rigoureuse, avec le soutien de certaines universités et de certains rectorats qui ont choisi de faire un effort particulier en vue de la préparation au concours. Le jury est pleinement conscient de l'importance des efforts consentis, que ce soient des efforts financiers, du temps passé ou les deux.

5.1.1 Déroulement des épreuves

Chacune des deux épreuves comporte un temps de préparation de trois heures. Les candidats reçoivent une convocation aux épreuves d'admission mentionnant l'heure du début de la préparation (se présenter un quart d'heure avant), ainsi que l'heure de passage devant la commission d'oral pour chacune des deux épreuves qui ont lieu en principe sur deux jours consécutifs y compris dimanches et jours fériés.
Le premier jour, le candidat choisit une enveloppe qui contient un choix de deux sujets. Ces deux sujets sont du même grand groupe, soit algèbre et géométrie, soit analyse et probabilités. Pendant la préparation, le candidat choisit le sujet qu'il va traiter ; il est peu stratégique d'hésiter trop longtemps entre les deux sujets.
Le deuxième jour (en général), le candidat choisit une enveloppe contenant un choix de deux sujets de l'autre épreuve. Ces deux sujets sont du grand groupe que le candidat n'a pas tiré lors de sa première épreuve.
Le jury veille à ce que les sujets de chaque couplage soient suffisamment différenciés pour qu'il y ait un vrai choix.
Compte tenu de l'évolution du concours (pour ce qui concerne l'épreuve d'exercices) qui est prévue en 2010, la première épreuve passée sera soit celle d'exposé soit celle d'exercices, en fonction du planning de passage. Ce point sera expliqué plus en détail ci-après, en 5.3.7.

5.1.2 Préparation aux épreuves et documents

Pendant la préparation, tout document personnel est interdit. Seuls sont autorisés les livres et revues en vente libre dans le commerce. Les candidats peuvent utiliser les livres de la bibliothèque qui est

mise à leur disposition, et dont l'inventaire figure en fin de ce rapport. Ils peuvent aussi utiliser leurs livres personnels à condition que ces livres ne soient pas annotés. Lors des trois heures de préparation, les candidats sont libres, à tout moment, de consulter ou d'emprunter des livres à la bibliothèque ou de prendre dans leurs bagages les livres qu'ils ont apportés.
Les calculatrices sont considérées comme des document personnels et sont, à ce titre, interdites. Cependant, selon le sujet traité, l'usage d'une calculatrice peut être autorisé par le président du jury, ou son représentant, à condition que le candidat justifie de son utilisation lors de la présentation de l'exposé ou des exercices devant la commission d'oral.

5.2 La première épreuve orale : exposé

Cette épreuve comprend trois parties : le plan, le développement, puis les questions du jury. Chacune dure en principe un quart d'heure. Elle est précédée d'une préparation de trois heures. Avant de faire des commentaires spécifiques à chacune des phases de l'épreuve, commençons par des remarques d'ordre général.
Il est conseillé de bien lire et comprendre le sujet. Il vaut mieux éviter de se disperser en cherchant dans un trop grand nombre d'ouvrages. Il faut bien sûr maîtriser les résultats du programme de l'agrégation correspondant au sujet traité, mais si un candidat, pour une application ou une comparaison de méthodes, évoque d'autres outils du programme, il est nécessaire qu'il les connaisse aussi.
Les deux premières parties de l'épreuve (plan et exposé) se déroulent sans interruption ; les questions ne débutent qu'ensuite et portent en premier lieu sur ce qui vient d'être présenté. Ce mode de fonctionnement impose au candidat de faire tenir l'intégralité de son plan et de son développement sur le tableau (recto verso si le tableau le permet).
Si le candidat a réalisé son plan et son développement en moins de 30 minutes, le temps des questions n'est pas nécessairement allongé d'autant.

5.2.1 Le plan

Il s'agit de faire un exposé structuré sur le sujet choisi en quinze minutes : définitions, énoncés clairs et précis, exemples, contre exemples, applications... Cela peut ressembler à un cours magistral dans lequel on ne présente toutefois aucune démonstration et où le niveau de rédaction doit rester compatible avec le temps imparti. Le plan doit être conforme au programme de l'agrégation interne.
Le candidat n'est pas obligé d'être exhaustif sur le sujet, mais il est souhaitable qu'il puisse expliquer ses choix et motiver l'introduction de telle ou telle notion. Le jury attend avant tout un exposé logique avec des énoncés complets, exacts et correctement quantifiés, des définitions et théorèmes (qu'il ne faut pas confondre) et une présentation rendue attrayante par l'intérêt porté par le candidat au sujet, par de nombreux exemples (significatifs) et quelques figures. Donner quelques applications est précieux, surtout si le titre de la leçon le demande explicitement.
Le candidat doit gérer l'espace, le tableau, et le temps qui lui est alloué. Le candidat peut consulter ses notes personnelles en cours d'exposé, mais ne peut se contenter de les recopier !
Il termine son exposé en indiquant le point qu'il se propose de développer dans la deuxième partie. Il est déconseillé d'attendre ce moment pour prendre une décision et de montrer aux examinateurs des hésitations sur ce choix.
Le plan, comme le développement, ne peuvent se limiter à un compte rendu de lecture d'un ouvrage, si bon que soit cet ouvrage.
L'exposé des prérequis et des notations est indispensable dans la plupart des leçons. Parfois, le choix de prérequis trop forts vide la leçon de son sens. Ainsi, un candidat qui traite une leçon sur la trigonométrie ne peut admettre en prérequis les formules d'Euler et se contenter d'en déduire les relations d'addition de la trigonométrie réelle. Les candidats doivent aussi prendre garde que le sujet

choisi peut être traité dans certains manuels au long de plusieurs chapitres. Ainsi, dans la leçon sur la dimension des espaces vectoriels, admettre en prérequis que si l'espace vectoriel est engendré par n vecteurs, toute famille libre compte au plus n vecteurs, c'est évacuer un point faisant partie intégrante de la leçon.

5.2.2 Le choix des leçons

Comme les années précédentes, le jury a constaté une réticence de la part d'un bon nombre de candidats à choisir une leçon de géométrie ou de probabilités. C'est regrettable car la préparation au concours interne de l'agrégation pourrait être l'occasion pour les professeurs de mettre à jour leurs connaissances dans ces deux domaines qui ont une place importante dans les programmes actuels de l'enseignement secondaire. À ce propos, le jury rappelle que les professeurs agrégés peuvent être appelés à enseigner dans l'enseignement supérieur (STS, CPGE, etc.).

5.2.3 Les sujets « larges »

Les sujets plus larges, identifiables dans les listes qui suivent, devaient être traités dans les mêmes conditions que les autres sujets (plan, développement, questions des examinateurs), avec un plan en forme d'exposé synthétique.
Cette année, les sujets larges ont été parfois mal compris jusqu'à mettre en difficulté des candidats pourtant solides. Les candidats pensent qu'ils doivent couvrir tout le sujet, en partant des bases jusqu'aux résultats plus difficiles, ce qui dépasse inévitablement le créneau d'un quart d'heure. On rappelle donc qu'il n'est pas demandé aux candidats un exposé exhaustif de ces questions larges, mais plutôt une valorisation de l'expérience et de la réflexion pédagogique de l'enseignant sur un thème particulier. Un temps trop long consacré à des préliminaires fastidieux a pour conséquence un rétrécissement de la base sur laquelle les candidats sont évalués.
Quant au développement, il doit demeurer rigoureux et significatif, autour d'un point particulier cohérent avec le sujet.

5.2.4 Le développement

Le candidat a le choix de développer une démonstration ou une application. Ce choix doit être consistant (et pas un petit exercice d'application), cohérent avec le niveau de l'exposé et pouvoir être présenté en quinze minutes. Il doit porter sur une partie significative de l'exposé : un même développement, bien préparé pendant l'année, peut servir dans plusieurs leçons, mais pas dans toutes. Ainsi, les intégrales de Wallis ne constituent pas le développement souhaité dans la leçon sur le calcul d'aires et de volumes. Le théorème sur l'uniforme continuité des fonctions définies et continues sur un espace compact s'applique évidemment aux fonctions continues sur une partie compacte de $\mathbf{R}^n$, mais ce n'est sans doute pas le cœur de la leçon.
Le choix de l'exposé doit être fait avec soin car il révèle aux examinateurs la compréhension que le candidat a du sujet posé.
Le développement ne doit pas être une suite de calculs pendant tout le temps imparti (ce qui risque d'être le cas avec certaines situations d'algèbre linéaire comme le calcul d'un déterminant, l'inversion d'une matrice etc.). Il convient, sur des sujets pouvant amener ce niveau de technicité, de choisir judicieusement les situations de calcul qui seront développées.
Le développement ne peut se réduire au traitement d'un exemple, même soigné, sauf si c'est un exemple réellement fondamental, agissant comme un paradigme ; un exposé d'exemple est plus à sa place dans la seconde épreuve. En revanche, faire figurer des exemples significatifs dans le plan est de bon aloi.

Pendant cette phase le candidat doit mettre en valeur ses qualités pédagogiques, il doit travailler sans notes ; il a compris ce qu'il expose et le rend compréhensible à son auditoire :

- il commence par expliquer les idées importantes de la démonstration avant de rentrer dans les détails techniques,
- il s'appuie le plus possible sur des figures, et pas seulement en géométrie,
- il insiste sur les points difficiles,
- il montre qu'il a bien compris le rôle de chacune des hypothèses.

Nous conseillons aux candidats de préparer soigneusement cette partie (certains développements beaucoup trop ambitieux ont joué des mauvais tours aux candidats qui s'y étaient engagés).

5.2.5 Le niveau de la leçon

Le jury a entendu nombre d'exposés qu'on attendrait plutôt face au jury du CAPES. On n'attend certes pas des résultats extraordinaires, mais il serait bon que les candidats montrent qu'ils ont progressé en mathématiques et surtout qu'ils se sont approprié les notions qu'ils présentent.
À l'opposé, certains candidats, sans doute poussés par des ouvrages d'apparence séduisante, se placent à un niveau mathématique qui les dépasse et s'engagent à traiter des points délicats, amenant des questions du jury du même niveau de difficulté.
Ajoutons que le jury pourra être indulgent pour un exposé de niveau mathématique modeste à condition qu'il soit bien maîtrisé, souligné par des applications judicieusement choisies, et mis en perspective par rapport à plusieurs niveaux d'enseignement et pas seulement au niveau du collège.

5.2.6 Les questions du jury

Ce temps qui conclut l'interrogation a pour but de vérifier la solidité des connaissances et compétences du candidat et de lui permettre de se valoriser. Par ses questions, le jury ne cherche qu'à

- faire corriger une erreur commise, rectifier une imprécision dans le plan ou une démonstration,
- contrôler si la démonstration est comprise ou seulement récitée, par exemple en variant les hypothèses,
- vérifier que le candidat a une maîtrise suffisante des sujets abordés : par exemple un candidat qui a énoncé le théorème de Heine ne devrait pas avoir de difficulté à démontrer que la fonction *sinus* est uniformément continue sur toute la droite,
- s'assurer que les résultats (théorèmes) énoncés dans le plan sont suffisamment maitrisés pour être appliqués à un exemple simple (inversion d'une matrice carrée assez simple, réduction d'une matrice symétrique réelle, etc.),
- donner au candidat l'occasion de montrer ses connaissances sur d'autres aspects du sujet ou des applications (c'est-à-dire, sa culture mathématique), tout en restant dans le cadre du programme (à moins que le candidat souhaite s'en éloigner).

5.2.7 Quelques leçons particulières

Les leçons sur les approximations (205, 254, 255) ont amené des développements pouvant être à la limite du sujet (par exemple, la recherche d'une décomposition d'une fonction périodique en somme de sa série de Fourier, ou de développement de solutions d'équations différentielles en série entière). Les candidats doivent avant tout se demander ce qu'est une approximation (pour quelle norme, avec quelle précision).
La leçon 213 s'est révélée plus ardue que certains candidats ne l'avaient imaginé ; en particulier, on doit s'interroger sur le choix concernant la définition de la fonction exponentielle complexe et les conséquences didactiques de ce choix (outre la série entière, on peut envisager de définir l'exponentielle par la formule $\exp(z) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$ ou encore comme solution d'une équation différentielle). La leçon

sur les normes en dimension finie (204) a donné lieu à des « cercles vicieux » que les candidats ont eu du mal à analyser : citer comme conséquence du théorème d'équivalence des normes en dimension finie le fait que les parties fermées et bornées d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont compactes, mais utiliser ce fait dans la preuve du théorème d'équivalence... pour échapper à ce piège on peut commencer par étudier la topologie-produit (la norme du max), puis s'attaquer à une norme quelconque dans un second temps, ou encore mener un travail sur les suites de Cauchy. Il se peut que la confusion trouve son origine dans un livre.
La leçon sur les PGCD de polynômes (106) a donné lieu à un excellent exposé, le candidat ayant choisi de viser la décomposition en sous-espaces cycliques pour un endomorphisme, commençant par présenter son cheminement, quelques résultats partiels, puis le lien entre ces résultats et la conclusion, et à la fin les démonstrations des différents points particuliers.
La leçon sur continuité et dérivabilité (236) est souvent illustrée d'exemples trop pauvres ; ainsi, ne citer que la fonction « valeur absolue » comme exemple de fonction continue non dérivable est largement insuffisant.
La leçon sur les égalités et inégalités (244) a amené des développements surprenants comme le théorème du rang dont la preuve apporte très peu d'idées sur l'obtention des égalités et/ou inégalités.
La leçon sur les fonctions numériques de deux variables (243) a amené des plans très longs (continuité, continuité partielle, différentiabilité, dérivées partielles, formule de Schwarz etc.), impossibles à finir si bien que ni courbes de niveau ni gradient ne purent être évoqués.
Les leçons de probabilités ne peuvent se limiter à fournir des prétextes pour quelques calculs de sommes de séries ou d'intégrales.

5.3 La seconde épreuve orale : exemples et exercices

5.3.1 Principe de l'épreuve

L'épreuve dite d'exemples et exercices consiste à présenter à partir de situations particulières (d'où le nom de l'épreuve) comment le candidat conçoit la pratique des mathématiques par rapport aux connaissances fondamentales, aux différents niveaux d'enseignement et aux outils qui peuvent être éventuellement mobilisés (logiciels, programmation).
Pour simplifier ce qui suit, nous ne parlerons que d'exercices mais on pourra lire à chaque fois « exemples ou exercices ».

5.3.2 Déroulement de l'épreuve

À son arrivée, le candidat tire au sort une enveloppe comportant deux thèmes d'exercices et choisit l'un d'entre eux. Il dispose alors de trois heures pendant lesquelles il peut librement consulter les ouvrages mis à sa disposition par la bibliothèque de l'agrégation, ou bien ceux qu'il aura pris soin d'apporter avec lui.
Pendant sa préparation, le candidat sélectionne trois à six exercices correspondant au thème retenu et rédige un document comportant la liste des énoncés, ainsi que les motivations et remarques correspondantes. À l'issue de la préparation, des photocopies de ce document sont réalisées par les appariteurs ; ces photocopies sont remises aux examinateurs et l'épreuve orale proprement dite peut alors commencer.
L'épreuve se déroule alors en trois temps :

1. **Présentation** motivée de l'ensemble des exercices sélectionnés par le candidat (durée maximale de 15 minutes).
2. Résolution commentée d'un des exercices au choix du candidat parmi ceux qu'il vient de présenter (durée maximale de 15 minutes).

3. Questions du jury (durée minimale de 15 minutes).

5.3.3 Présentation motivée des exercices

Il s'agit d'expliquer les raisons qui ont conduit au choix des exercices. Celles-ci peuvent être d'ordre pédagogique ou d'ordre mathématique, l'un n'excluant évidemment pas l'autre. Voici quelques suggestions quant aux motivations possibles :

Objectif : Il est important d'indiquer à quel public s'adressent les exercices et ce qu'ils supposent connu de ce public. Il faut également décrire quel est l'objectif de chaque exercice : illustration ou complément d'un résultat de cours, entraînement à une technique de calcul particulière, mise en évidence d'une propriété remarquable, ... On peut préciser la nature du travail de l'élève (exercice d'entraînement, de réinvestissement, d'évaluation, de recherche...) ainsi que les apprentissages visés. On doit par ailleurs bien comprendre qu'un exercice ne peut consister en la démonstration d'un théorème du cours. Par exemple, le fait que les seuls idéaux de l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers en sont les sous-groupes $n\mathbf{Z}$ doit raisonnablement faire partie d'un plan de cours sur la divisibilité dans $\mathbf{Z}$, mais ne saurait être proposé en exercice de la seconde épreuve.

Niveau : Les difficultés éventuelles d'un énoncé doivent être soulignées. Le souci de graduer ces difficultés ou d'aider à les surmonter par des indications appropriées constitue un aspect possible de la présentation des exercices.

Cohérence : Les énoncés ne doivent pas constituer une collection hétéroclite, sans que jamais se dégage une quelconque méthode un peu générale : leur ensemble doit posséder un certain degré de cohérence, variable selon les sujets. Il serait bon, par exemple lors de la présentation, que les candidats puissent dégager les idées, méthodes générales qui entrent en jeu même si elles sont illustrées dans les exercices sur des cas particuliers. Indiquer les connexions pouvant relier certains énoncés est une démarche appréciée, de même que l'indication de la place de ces exercices dans une séquence d'enseignement. Souvent, le manque de cohérence éprouvé par le jury provient de ce que les candidats s'inspirent de quatre à cinq ouvrages différents, qui entrent en conflit les uns avec les autres au niveau des notations, des hypothèses relatives aux résultats fondamentaux[1].

Intérêt : Le jury apprécie de trouver quelques exercices réellement intéressants dans le choix proposé ; le fait qu'un exercice apparaisse dans un livre ne garantit aucunement qu'il présente de l'intérêt. Un exercice peut apporter un éclairage particulier sur une notion, ou laisser entrevoir un développement de celle-ci ou encore en donner une application pertinente. De tels critères peuvent être mis en avant pour justifier du choix d'un exercice. Lorsqu'il existe diverses méthodes pour résoudre un problème donné, un exercice peut avoir pour objectif d'en comparer certaines, ne serait-ce que sur des exemples. Ainsi, une leçon sur les congruences ne peut pas être illustrée par la seule résolution d'un système de deux congruences.

Originalité : Le choix d'un exercice doit relever d'un véritable investigation didactique adaptée au sujet retenu, et non se limiter au recyclage de quelques situations rabachées. De fait, les candidats semblent tous s'inspirer des mêmes sources, peu ou prou. Ainsi, on a très souvent entendu un exercice autour du nombre 4444^{4444}, des déterminants de Gram ou de Cauchy, etc. C'est ainsi que plusieurs propositions d'exercices étaient franchement hors-sujet.

Bien souvent, les candidats n'ont pas pris la peine de réfléchir à cette première partie de leur oral et se contentent de donner lecture de leurs énoncés en quelques minutes. D'autres encore, pratiquent avec plus ou moins de conviction la stratégie du « remplissage », qui consiste à occuper au mieux les quinze minutes dont ils disposent, en diluant la présentation de leurs exercices à grands coups de phrases creuses comme « j'ai choisi l'exercice 1 parce qu'il était facile, le 2 parce qu'il était un peu plus dur, le 3 parce qu'il est difficile et le 4 parce qu'il est intéressant ». Un bavardage « pseudopédagogique » n'est pas non plus d'un grand effet, surtout quand la résolution qui suit bute sur des obstacles importants.

[1] parfois même au niveau de la théorie de l'intégration sous-jacente, ce qui en a gêné plus d'un

D'autres enfin se contentent d'énoncer quelques théorèmes en rapport avec les exercices : ce n'est pas cela non plus qui est attendu.
Une autre erreur à éviter est le hors sujet : le candidat doit veiller à ce que les exercices qu'il propose entrent bien dans le cadre délimité par le titre du sujet. De plus, si l'intitulé est du type « Exercices faisant intervenir telle notion ... », il faut bien comprendre qu'on ne demande pas de simples exercices d'entraînement sur la notion en question. À titre d'exemple, si l'intitulé est « Exercices faisant intervenir des déterminants », on ne saurait se limiter au calcul de quelques déterminants considérés comme un but en soi. On attend en revanche des exercices montrant diverses utilisations de cette notion (à titre indicatif : résolution des systèmes de Cramer, calcul des valeurs propres d'un endomorphisme à l'aide du polynôme caractéristique, déterminants de Hankel, jacobien et caractérisation des difféomorphismes, caractérisation de la positivité des matrices symétriques réelles et application à la convexité d'une fonction numérique de plusieurs variables réelles par sa matrice Hessienne, etc.).
Motiver le choix d'une liste d'exercices, c'est expliquer la pertinence de ce choix, préciser les prérequis, situer les exercices dans leur contexte, commenter leur apport sur le plan pédagogique ... tout cela doit faire l'objet d'une réflexion personnelle et d'un réel questionnement.
Certains candidats présentent très honorablement cette première partie de l'épreuve, et mettent ainsi en valeur leurs compétences pédagogiques et leurs acquis professionnels. Il va de soi qu'il en est tenu compte dans la notation de l'épreuve.

5.3.4 Résolution détaillée d'un exercice

À l'issue de la présentation des exercices, le candidat désigne un exercice qu'il se propose de résoudre en détail. Insistons sur le fait que ce choix revient au candidat et non aux examinateurs. Au cours de cette phase, tout comme pour la précédente, les examinateurs n'interviennent pas et le candidat doit faire preuve d'autonomie. Certains choix d'exercices peuvent s'avérer malencontreux, notamment lorsque des calculs sont requis ; les candidats confrontés à cette situation ont souvent eu du mal à gérer la longueur et la technicité des calculs. On recommande, en pareil cas, d'exposer la démarche en premier lieu, puis d'approfondir les points les plus marquants ; le jury demandera, le cas échéant, des détails complémentaires.
Tout d'abord, la pertinence du choix de l'exercice sera un élément important d'appréciation. Il s'agit de trouver un juste équilibre entre deux situations extrêmes : on voit parfois des candidats énumérer quatre énoncés d'exercices plutôt consistants pour finalement proposer la résolution d'un premier exercice très élémentaire (effet désastreux garanti) ; et l'excès inverse, qui consiste à s'engager dans la résolution d'un exercice d'une complexité mal mesurée, est également fort risqué.
Ajoutons encore que certains candidats s'avèrent incapables de fournir un énoncé correct des théorèmes qu'ils utilisent lors de la résolution de leurs exercices. Ainsi, le changement de variable dans une intégrale simple devrait pouvoir être justifié au moyen d'un énoncé précis (tout particulièrement quand la fonction intégrée n'est pas continue). Autre exemple, le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre (Leibniz) peut être énoncé de diverses façons, dont les hypothèses diffèrent sensiblement et influent sur la résolution d'un exercice faisant intervenir ce théorème ; un candidat incapable de produire un énoncé correct du théorème de Leibniz quand il en a besoin sera donc fortement pénalisé. Dernier exemple : les exercices de développement d'une fonction en série de Fourier nécessitent très probablement la connaissance des hypothèses du théorème de Dirichlet !
Enfin, le jury va évaluer la prestation du candidat en tenant d'abord compte de critères mathématiques (clarté de la démonstration, précision des arguments, traitement soigné de la logique). En particulier, les énoncés de théorèmes doivent être précis et correctement quantifiés. Le jury va ensuite prendre en compte des critères non mathématiques, comme la fluidité de l'élocution et la gestion du tableau. Sur ce dernier point, il est regrettable que certains candidats (heureusement peu nombreux) présentent leurs calculs au tableau de façon véritablement chaotique, faisant naître des doutes

concernant leurs capacités professionnelles. Une écriture lisible, des calculs correctement organisés, une élocution audible, un certain équilibre entre les explications données oralement et celles écrites au tableau : ce sont des compétences professionnelles que les épreuves orales évaluent.

5.3.5 Quelques leçons particulières

À propos de l'approximation (417, 432, 433), il serait souhaitable que les candidats envisagent les procédés amenant une approximation effective, c'est-à-dire avec une majoration de l'erreur. Rappelons qu'il est permis aux candidats de demander à se servir d'une calculatrice sur des sujets le nécessitant réellement ; par ailleurs, les modalités de l'épreuve 2010 vont faciliter la mise en œuvre d'une approximation effective grâce aux logiciels.
À propos des intégrales multiples (426), il convient de dépasser le cas des fonctions de deux variables séparables sur des domaines simples (c'est le principe de graduation des difficultés qui doit s'appliquer ici).
À propos des intégrales impropres (422), il convient de s'interroger sur la continuité de la fonction intégrée, et de bien faire ressortir la nature de l'intervalle d'intégration ($[a, b[$ ou $]a, b[$ ou $]a, b]$).
À propos de la leçon 310 (exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir des polynômes), il semble que les candidats interprètent souvent « faisant intervenir » comme « sur », ce qui restreint ou déplace le sujet ; en l'occurence, on attend des situations d'algèbre linéaire où le fait d'introduire des polynômes éclaire le problème (exemple ultra-classique : tout endomorphisme diagonalisable induit un endomorphisme diagonalisable sur tout sous-espace stable). Cette remarque vaut en fait pour toutes les leçons formulées comme « exercices faisant intervenir... ».

5.3.6 Questions du jury

Ces questions peuvent être de plusieurs sortes. Tout d'abord, il est bien souvent demandé au candidat de donner des précisions sur la résolution de l'exercice qu'il a proposé. Ceci permet de corriger d'éventuels lapsus (ou de mettre en évidence une faille dans la démonstration) et de s'assurer que le candidat a réellement saisi les divers aspects de la résolution (en examinant par exemple l'impact d'une modification des hypothèses sur le résultat annoncé). Le candidat doit s'attendre à être interrogé au moins partiellement sur la résolution de chaque exercice qu'il propose. À défaut de connaître par cœur tous les calculs en détails, il faut au minimum connaître les méthodes utilisées et les différents enchainements de la résolution.
Par ailleurs, les examinateurs cherchent à déterminer si les notions apparaissant dans tel ou tel énoncé sont effectivement connues du candidat. En ce sens, le candidat, par un choix d'exercices trop ambitieux, risque d'élever le niveau des questions qui peuvent lui être posées. Il n'est pas recommandé d'évoquer des questions à propos desquelles on n'a aucun recul.
Pour terminer, soulignons clairement que les questions du jury n'ont en aucun cas pour but de déstabiliser le candidat. Elles visent simplement à cerner au mieux l'étendue de ses connaissances et compétences afin de le classer, le plus justement possible, par rapport aux autres candidats.

5.3.7 Évolution de cette épreuve pour 2010

Les mathématiques d'aujourd'hui utilisent très largement les moyens mis à disposition par les progrès de l'informatique, qu'il s'agisse de logiciels « prêts à l'emploi » ou d'algorithmes résolvant des problèmes de manière explicite. Cette situation a également modifié de manière très importante les conditions de l'exercice du métier d'enseignant : d'une part, certaines tâches techniques (longs calculs, tracés de courbes, modélisation de situations géométriques) sont largement facilitées par des logiciels spécialisés et d'autre part différents logiciels interviennent dans le quotidien de la classe. Enfin, on

doit mentionner l'introduction récente de l'algorithmique dans ls programmes de mathématiques au niveau du lycée.
C'est pourquoi il est apparu nécessaire d'évaluer l'aptitude des candidats à « faire des mathématiques » dans ce contexte nouveau. Pratiquement, au cours de la seconde épreuve, dite d'exemples et exercices, les candidats disposeront d'un matériel informatique (un ordinateur portable fonctionnant sous Linux) et d'un choix de logiciels qui sont précisés en 3.4.1. Les sujets proposés seront très proches des actuels. Les candidats auront la possibilité, **s'ils le souhaitent**, d'illustrer **un** (et pas plus d'un) des exemples ou exercices constituant leur leçon au moyen d'un algorithme effectivement programmé ou de l'usage d'un logiciel. Comme actuellement, le jury demandera la présentation d'un ou plusieurs des exemples et exercices proposés.
Comme les précédents rapports l'ont déjà précisé, le but de la présentation effectuée par le candidat ne sera ni une description factuelle d'une succession d'actions ni la démonstration d'une quelconque virtuosité technique. Au contraire, le jury attendra la mise en évidence d'un lien fort entre les fondements mathématiques et les illustrations informatiques ou logicielles, sans perdre de vue l'arrière-plan pédagogique. Concernant la présentation des algorithmes, on pourra se contenter d'une rédaction dans un pseudo-langage « en français ». Enfin, les candidats veilleront à ne pas passer tout le temps d'exposé qui leur est imparti à développer cet aspect des choses.
Pour des raisons d'organisation matérielle, la moitié des candidats passeront la seconde épreuve (exemples et exercices) avant la première (exposé).
En fonction du bilan de l'oral 2010, des évolutions auront lieu pour les sessions ultérieures.

5.4 Liste des sujets de la session 2008

Leçons d'algèbre et géométrie

❁ ❁ ❁

101 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.
102 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.
103 Congruences dans $\mathbf{Z}$, anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.
104 Nombres premiers.
105 PGCD, PPCM dans $\mathbf{Z}$, théorème de Bézout. Applications.
106 PGCD dans $K[X]$, où K est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.
107 Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels.
108 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang.
109 Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.
110 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Applications.
111 Changements de bases en algèbre linéaire. Applications.
112 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.
113 Déterminants. Applications.
116 Homothéties-translations. Applications.
118 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.
120 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien (dimension finie). Applications.
122 Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Applications géométriques.
123 Nombres complexes et géométrie.
125 Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications.
126 Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, formes réduites.
127 Géométrie du triangle.
128 Barycentres. Applications.
130 Droites et plans dans l'espace.
131 Projections et symétries dans un espace affine de dimension finie.
137 Cercles et droites dans le plan affine euclidien.
140 Division euclidienne.
142 Utilisation de groupes en géométrie.
143 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.
144 Rang en algèbre linéaire.
145 Utilisation de transformations en géométrie.
146 Coniques.
147 Courbes planes paramétrées.
148 Angles.
149 Équations et géométrie.
150 Factorisation de matrices.
151 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
154 Trigonométrie.
155 Systèmes linéaires.
156 Valeurs propres.
157 Arithmétique dans $\mathbf{Z}$.
158 Actions de groupes. Exemples et applications
159 Algorithme d'Euclide dans $\mathbf{Z}$. Calcul de PGCD et de coefficients de Bézout. Applications.

160 Algorithmes du pivot de Gauss. Applications.
161 Étude métrique des courbes planes.
162 Rang d'une matrice ; déterminations, algorithmes de calcul.

Leçons d'analyse et probabilités

❁ ❁ ❁

201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications.
202 Séries à termes réels positifs. Applications.
203 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi–convergence (les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs étant supposés connus).
204 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.
205 Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation des fonctions.
206 Parties compactes de $\mathbf{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications.
207 Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.
208 Théorème du point fixe. Applications.
209 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.
210 Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
212 Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés. Exemples.
213 Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre π.
215 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
216 Théorèmes des accroissements finis. Applications.
217 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
218 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.
219 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.
220 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration de l'erreur.
221 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$ (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.
222 Intégrale d'une fonction numérique continue par morceaux sur un segment. Propriétés.
223 Intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.
224 Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
225 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants ; écriture matricielle. Exemples.
227 Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité. Fonctions composées. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Exemples.
228 Théorème des accroissements finis pour une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$. Étude des extremums.
229 Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variable aléatoire de loi binomiale. Approximations de cette loi.
230 Probabilité conditionnelle et indépendance. Couples de variables aléatoires. Exemples.
231 Espérance, variance ; loi faible des grands nombres.
232 Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.
233 Approximation d'un nombre réel. Théorie et méthodes.
234 Équations différentielles.
235 Exponentielles et logarithmes.
236 Continuité, dérivabilité des fonctions d'une variable réelle.
237 Intégrales et primitives.
238 Le nombre π.
240 Problèmes d'extremums pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.
241 Diverses notions de convergence (on pourra se placer dans des contextes variés). Exemples.
242 Suites de nombres réels.

243 Fonctions numériques de deux variables réelles ; courbes de niveau, gradient.
244 Égalités et inégalités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Parseval, convexité. . .
245 Équations fonctionnelles.
246 Applications de l'analyse au calcul des grandeurs (aires, volumes. . .).
247 Limites à l'infini.
248 Mouvement à accélération centrale.
249 Loi normale.
250 Algorithmes de résolution approchée d'une équation numérique
251 Algorithmes de calcul du terme général d'une suite numérique et de la somme partielle d'une série numérique.
252 Algorithmes de calcul approché d'intégrales.
253 Algorithmes d'approximation des solutions d'une équation différentielle.
254 Algorithmes d'approximation d'un nombre réel.
255 Algorithmes d'approximation du nombre π.
256 Vitesse de convergence, accélération de convergence.

Exemples et exercices d'algèbre et géométrie

❁ ❁ ❁

301 Exercices sur les groupes.
302 Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans **Z**.
303 Exercices faisant intervenir la division euclidienne.
304 Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.
305 Exercices faisant intervenir les nombres premiers.
306 Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM et mettant en œuvre des algorithmes associés.
307 Exercices faisant intervenir des dénombrements.
308 Exercices faisant intervenir les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.
309 Exercices faisant intervenir polynômes et fractions rationnelles sur **R** ou **C**.
310 Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
311 Exercices faisant intervenir la notion de rang.
312 Exercices faisant intervenir des matrices inversibles.
313 Exercices faisant intervenir des systèmes linéaires.
314 Exercices faisant intervenir des déterminants.
315 Exercices faisant intervenir la recherche et l'emploi de vecteurs propres et valeurs propres.
316 Exercices faisant intervenir la réduction des endomorphismes.
317 Exercices sur les endomorphismes diagonalisables.
318 Exercices faisant intervenir des projecteurs ou des symétries.
319 Exercices faisant intervenir des méthodes ou des d'algorithmes de calcul en algèbre linéaire.
320 Exercices sur les isométries vectorielles dans les espaces euclidiens en dimension 2 et en dimension 3.
321 Exercices faisant intervenir la réduction des matrices réelles symétriques.
322 Exercices sur les formes quadratiques.
323 Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.
324 Exercices faisant intervenir des similitudes planes directes ou indirectes.
325 Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimension 2 et en dimension 3.
326 Exercices faisant intervenir la notion de barycentre.
327 Exercices faisant intervenir des applications affines.
329 Exercices sur les aires et les volumes.
330 Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimension 2 et en dimension 3.
331 Exercices sur la cocyclicité.
332 Exercices sur les cercles.
333 Exercices de géométrie plane faisant intervenir des triangles isométriques ou semblables.
334 Exercices sur les coniques.
335 Exemples d'étude de courbes planes.
337 Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).
338 Exercices sur les propriétés métriques des courbes de l'espace.
339 Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.
340 Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.
341 Exercices de construction en géométrie plane.
342 Exercices de géométrie faisant intervenir le choix d'un repère.
343 Exercices de cinématique du point.
345 Exercices sur les triangles.
346 Exemples de résolution de problèmes modélisés par des graphes.
347 Exercices faisant intervenir la trigonométrie.

Exemples et exercices d'analyse et probabilités

❁ ❁ ❁

401 Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes.
402 Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.
403 Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.
404 Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
405 Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
406 Exemples de comportement asymptotique de suites ; rapidité de convergence ou de divergence.
407 Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.
408 Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.
409 Exercices sur les suites de polynômes orthogonaux.
410 Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions d'une variable réelle.
411 Exemples d'étude de fonctions définies par une série.
412 Exemples de développements en série entière. Applications.
413 Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles.
414 Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
415 Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle.
417 Exemples d'approximations de fonctions numériques ; utilisations.
418 Exemples d'utilisation de développements limités.
419 Exemples d'utilisation d'intégrales pour l'étude de suites et de séries.
420 Exemples d'utilisation de suites ou de séries pour l'étude d'intégrales.
421 Exemples de calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
422 Exemples d'étude d'intégrales impropres.
423 Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.
425 Exemples de calculs d'aires et de volumes.
426 Exemples de calculs d'intégrales multiples.
427 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
428 Exemples de résolution d'équations différentielles scalaires.
429 Exemples de résolution de systèmes différentiels linéaires.
430 Exemples d'équations différentielles issues des sciences expérimentales ou de l'économie.
431 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable, d'une fonction numérique de deux variables.
432 Exemples d'approximations d'un nombre réel.
433 Approximations du nombre π.
434 Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.
435 Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes.
436 Exemples de calculs de primitives.
437 Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.
438 Exemples de problèmes de dénombrement.
439 Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue.
440 Exemples de calculs de la longueur d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$.
441 Exemples de systèmes différentiels linéaires $Y' = AY$ à coefficients réels constants en dimension 2. Allure des trajectoires.
442 Exemples d'exercices faisant intervenir le calcul des probabilités.

443 Exemples de résolution approchée d'équations $F(X) = 0$.

Chapitre 6

Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques

AABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT Press
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	Masson
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	Vuibert
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	Dunod
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	Cambridge
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	Cassini
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques • Tome 1A - Topologie • Tome 1B - Fonctions numériques • Tome 2 - Suites et séries numériques • Tome 3 - Analyse fonctionnelle • Tome 5 - Algèbre générale, polynômes • Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie • Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	Ellipses
ANDREWS G.	Number Theory	Dover
APPLE A.W.	Modern compiler implementation • in C • in Java • in ML	Cambrigde

ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie • Tome I • Tome II	Ellipses
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	Dunod
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	Dunod
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques • 1. Algèbre • 2. Analyse • 3. Compléments d'analyse • 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	Dunod
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gauthier-Villars
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gabay
ARTIN M.	Algebra	Prentice Hall
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée • Tome 1 • Tome 2	PUF
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	Masson
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	Masson
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	Belin

AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	Masson
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis	Addison Wesley
BADOUEL E., BOUCHERON S. **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	Springer
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	Hermann
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	Belin
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques • Tome 1 • Tome 2	Masson
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	Springer
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	Mc Graw Hill
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	Armand Colin
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	Cédic/Nathan

BERGER M.	Géométrie • Index • 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs • 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères • 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes • 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques • 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie tome 2	NATHAN
BICKEL P.J. DOKSUM K.A.	Mathematical statistics	PRENTICE HALL
BIDEGARAY B. MOISAN L.	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	SPRINGER
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BOAS R.	A primer of real functions	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	MASSON
BONNANS J.F. GILBERT J.C. LEMARECHAL C. SAGASTIZABAL C.	Optimisation numérique	SPRINGER
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique • Topologie générale, chapitres V à X • Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII • Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III • Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	HERMANN
BOUVIER A. RICHARD D.	Groupes	HERMANN

BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	Springer
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	Masson
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	Vuibert
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	Armand Colin
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	Cambridge
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire • 1. Espaces vectoriels , Polynômes • 2. Matrices et réduction	Ellipses
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CARREGA J.C.	Théorie des corps	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	Hermann
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	Hermann
CARTIER P. **KAHANE J.P.** **ARNOLD V. et al.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	Cassini

CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	PRENTICE HALL
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation • Analyse 2 • Analyse 3	MASSON
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	MASSON
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER VERLAG
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	MASSON
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	HERMANN
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	• Algèbre 1 • Algèbre 2	ELLIPSES
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	MASSON
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	VUIBERT
COHN P.M.	Algebra Volume 1	JOHN WILEY
COLLET P.	Modeling binary data	CHAPMAN AND HALL
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique • 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats • 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	DUNOD

CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	Dunod
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics • Volume 1 • Volume 2	John Wiley
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	Ediscience
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	John Wiley
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	• Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe • Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	Masson
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	Masson
DARTE A. **VAUDENAY S.**	Algorithmique et optimisation	Dunod
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration	Dunod
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	Que-sais-je ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF

DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	Dunod
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	Springer
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	Cassini
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	Springer
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN, RUAUD** **MIQUEL, SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés • 1ère année MPSI, PCSI, PTSI • 2ème année MP, PC, PSI	Dunod
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	Ellipses
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. • Fondements de l'analyse moderne • Éléments d'Analyse Tome 2.	Gauthier-Villars
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle • Première année • Deuxième année	Gauthier-Villars

DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les Mathématiques, plaisir et nécessité Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques	VUIBERT
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	VUIBERT
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fouriers series and integrals	ACADEMICS PRESS
EBBINGHAUS, HERMES **HIRZEBRUCH, KOECHER** **LAMOTKE, MAINZER** **NEUKIRSCH, PRESTEL, REMMERT**	Les Nombres	VUIBERT
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	DUNOD
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes • Analyse. Volume 1 • Algèbre.	CÉDIC/NATHAN
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques • Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles • Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse • Analyse 2 : Éléments de topologie générale	HATIER
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	ELLIPSES
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	CALVAGE ET MOUNET

FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications • Volume 1 • Volume 2	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	Masson
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions • Tome 1 - Topologie • Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle • Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples • Tome 4 - Séries, équations différentielles	Vuibert
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales • Algèbre • Analyse 1 • Analyse 2	Ellipses
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	Masson
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	Hermann
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR Maths Bordeaux
FRESNEL J.	Géométrie	IREM de Bordeaux
FRESNEL J.	Anneaux	Hermann
FRESNEL J.	Groupes	Hermann
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	Hermann

FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	Springer
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	Cassini
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices • Tome 1 • Tome 2	Dunod
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	Springer
GOBLOT R.	Algèbre commutative	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	Masson
GODEMENT R.	Analyse • Tome 1 • Tome 2 • Tome 3	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	Wiley
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation • Topologie et Analyse fonctionnelle • Calcul différentiel	Ellipses
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales • Tome 1 - Algèbre • Tome 2 - Topologie et analyse réelle • Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel • Tome 4 - Géométrie affine et métrique • Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' • Algèbre • Analyse	Ellipses

GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	HERMANN
GRAMAIN A.	Intégration	HERMANN
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	OXFORD
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	WILEY
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	ELLIPSES
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	CASSINI
HAMMAD P.	Cours de probabilités	CUJAS
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	CUJAS
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	SPRINGER
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	OXFORD
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do	OXFORD
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	ADDISON WESLEY
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis • Volume 1 • Volume 2 • Volume 3	WILEY-INTERSCIENCE
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	MASSON

HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	Addison Wesley
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	Belin
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	Springer Verlag
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra • Tome I • Tome II	Freeman and Co
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	Dover
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	Hermann
KNUTH D.E.	The art of computer programming • Volume 1 : Fundamental algorithms • Volume 2 : Seminumerical algorithms • Volume 3 : Sorting and Searching	Addison-Wesley
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	Ellipses
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	Modulo
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	Cambridge
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	Cambridge
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	Dunod

KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	CASSSINI
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	MASSON
LANG S.	Algèbre linéaire • Tome 1 • Tome 2	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra	ADDISON-WESLEY
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	ELLIPSES
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
LAX P. D.	Linear Algebra	WILEY
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	JACQUES GABAY
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	MASSON
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales • Tome 1 : Topologie • Tome 3 : Intégration et sommation • Tome 4 : Analyse en dimension finie • Tome 5 : Analyse fonctionnelle	MASSON

LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS • Tome I - Algèbre 1 • Tome 2 - Algèbre et géométrie • Tome 3 - Analyse 1 • Tome 4 - Analyse 2	Ellipses
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques • Tome 1 pour M-M' : Algèbre • Tome 1 pour A-A' : Algèbre • Tome 2 : Analyse • Tome 3 : Géométrie et cinématique • Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	Dunod
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	Armand Colin
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	Vuibert
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	Vuibert
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	Cambridge
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre • 1 : Structures fondamentales • 2 : Les grands théorèmes	Gauthier-Villars
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	Springer
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	Masson
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	Hermann

Manuels Matlab	• Using Matlab version 5 • Using Matlab version 6 • Statistics Toolbox	
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	Ellipses
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle • Tome 2 : Exercices et corrigés • Tome 3 : Exercices et corrigés • Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	Springer
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	Dunod
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique	Ellipses
MEUNIER	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés • Tome 2	PUF
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices	Ellipses
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	Cambridge
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes	Cassini
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	Calvage et Mounet
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	Hermann

MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	Ellipses
MONIER J.M.	Cours de mathématiques • Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI • Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI • Analyse 3 MP, PSI, PC, PT • Analyse 4 MP, PSI, PC, PT • Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI • Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT • Exercices d'analyse MPSI • Exercices d'analyse MP • Exercice d'algèbre et géométrie MP	Dunod
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique • Tome 1 • Tome 2	Vuibert
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	Seuil
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	Masson
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	Masson
NIVEN I.	Irrational numbers	Mathematical Association of America
NORRIS J.R.	Markov chains	Cambridge
OPREA J.	Differential geometry	Prentice hall
OUVRARD J.Y.	• Probabilités 1 (capes, agrégation) • Probabilités 2 (maîtrise, agrégation)	Cassini

PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard . . .Ê Les probabilités de tous les jours	VUIBERT
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	SPRINGER
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis • Volume I • Volume II	SPRINGER VERLAG
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	DUNOD
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales • 1- Algèbre • 2- Algèbre et applications à la géométrie • 3- Topologie et éléments d'analyse • 4- Séries et équations différentielles • 5- Applications de l'analyse à la géométrie	MASSON
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions • Algèbre • Analyse 1 • Analyse 2	MASSON

RAMIS J.- P., WARUSFEL A. **BUFF X., GARNIER J.** **HALBERSTADT E.** **LACHAND-ROBERT T.** **MOULIN F., SAULOY J.**	Mathématiques Tout-en-un pour la licence Cours complet avec 270 exercices corrigés • niveau L1	DUNOD
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	WILEY
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	LIVRE DE POCHE
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation Analyse pour l'agrégation	VUIBERT
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis	MC GRAW HILL

SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	Hermann
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	Ellipses
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	Springer
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	Ellipses
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	Vuibert
SCHWARTZ L.	Analyse • I Topologie générale et analyse fonctionnelle • II Calcul différentiel et équations différentielles	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms	Addison Wesley
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	Pearson Education
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	Dunod
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	Springer
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	• Analyse 3 • Analyse 4	Ellipses

SIDLER J.C.	Géométrie Projective	Dunod
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	Thomson C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	Dunod
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	Waddworth and Brooks
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	Cassini
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	Dunod
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	Masson
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	Masson
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Institut Elie Cartan
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	Masson
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	Vuibert

TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM des Pays de Loire
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	Seuil
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique • I Théorie des fonctions • II Équations fonctionnelles - Applications	Masson
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	Hermann
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	Masson
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes Équations différentielles	Hermann
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	Classiques Hachette
WARUSFEL, ATTALI COLLET, GAUTIER, NICOLAS	Mathématiques • Analyse • Arithmétique • Géométrie • Probabilités	Vuibert
WEST D. B.	Introduction to graph theory	Prentice Hell
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis	Cambridge
WILF H.	Generatingfunctionology	Academic Press
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire	Cassini
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages	MIT Press
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	Dover
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	Dover

ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	CASSINI
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON