Secrétariat Général

Direction Générale des Ressources Humaines

Rapport sur l'agrégation interne et le CAERPA de mathématiques

Année 2010

Ce rapport, rédigé par des membres du jury, est publié sous la responsabilité du président du jury

Table des matières

Chapitre 1

Composition du jury

Président

M. Robert CABANE	Inspecteur général	

Vice-présidents

Anne BURBAN	Inspectrice générale	
Hervé QUEFFELEC	Professeur d'université	Université de LILLE
Marc ROSSO	Professeur des universités	Université de PARIS-Diderot
René CORI	Maître de conférences	Université de PARIS-Diderot

Secrétaire

Marie-Hélène MOURGUES	Maître de conférences	Université de PARIS-Est

Correcteurs et examinateurs

Anne-Marie AEBISCHER	PRAG	BESANÇON
Florence BANTEGNIES	Professeur de chaire supérieure	PARIS
François BOISSON	Professeur de chaire supérieure	PARIS
Hassan BOUALEM	Maître de conférences	Université de MONTPELLIER 2
Anne BOUTTELOUP	Professeur de chaire supérieure	TOULOUSE
Guillaume BREVET	Professeur agrégé	BORDEAUX
Robert BROUZET	Maître de conférences	Université de NÎMES
Francine BRUYANT	Maitre de conférences	Université de REIMS
Laurent CHAUMARD	Professeur agrégé	MONTPELLIER
Denis CHOIMET	Professeur de chaire supérieure	LYON
Jean-François DANTZER	Professeur agrégé	ANGERS
Gérard DEBEAUMARCHE	Professeur de chaire supérieure	REIMS
François DEHAME	Professeur de chaire supérieure	PARIS
Thierry DUGARDIN	Professeur de chaire supérieure	MEAUX
Monique ERNOULT	IA-IPR	CRETEIL
Françoise FLICHE	IA-IPR	GRENOBLE
Sandrine GACHET	Professeure de chaire supérieure	DIJON
Viviane GAGGIOLI	Professeure agrégée	LYON
Jean-Pierre GAUDIN	PRAG	IUT ORLÉANS
Patrick GÉNAUX	Professeur de chaire supérieure	STRASBOURG
Christine GEORGELIN	Maître de conférences	Université de TOURS
Christophe HENOCQ	Professeur de chaire supérieure	PARIS
Michel HENRI	Professeur de chaire supérieure	POITIERS
Ollivier HUNAULT	IA-IPR	CRETEIL
Marie-Emmanuelle JOINT	Professeure agrégée	ANGERS
Matthieu LE FLOC'H	Professeur agrégé	BREST
Geneviève LORIDON	IA-IPR	BESANCON
Jean-Paul MARGIRIER	Professeur agrégé	LYON
Jacques MOISAN	IGEN	PARIS
Françoise MUNCK-FRABOUL	IA-IPR	NANTES
Stéphan PAINTANDRE	Professeur agrégé	TOULOUSE
Claudine PICARONNY	Maître de conférences	ENS Cachan
Alain PIETRUS	Professeur d'université	ANTILLES-GUYANE
Marc POLZIN	Maître de conférences	Université de BORDEAUX 1
Thierry QUENTIN	Maitre de conférences	Université de PARIS-Sud
Claude ROUFF	Professeur de chaire supérieure	CLERMONT-FERRAND
David RUPPRECHT	Professeur agrégé	NANCY
Frédéric SUFFRIN	Professeur de chaire supérieure	STRASBOURG
Violaine THIBAU	Maitre de conférences	PARIS
Georges VINAVER	PRAG	EVRY
Valérie WAJS	Professeur agrégé	PARIS
Alain WALBRON	Professeur de chaire supérieure	PARIS

Chapitre 2

Déroulement et statistiques

2.1 Généralités

Les épreuves écrites ont eu lieu les 28 et 29 janvier 2010, la liste d'admissibilité a été signée le 22 mars avec les chiffres suivants :
Agrégation interne : 267 admissibles ; CAERPA : 17 admissibles.
Les épreuves orales se sont déroulées du 18 au 25 avril 2010, à l'Ecole Nationale de Commerce, boulevard Bessières à Paris. La liste d'admission a été signée le 26 avril avec les chiffres suivants : Agrégation interne : 114 admis ; CAERPA : 8 admis.

Quelques remarques

- Comme on peut le constater sur les tableaux donnés ci-après, le nombre des candidats présents aux deux épreuves écrites est en diminution cette année. Concernant le concours d'accès à l'échelle de rémunération des professeurs agrégés (enseignement privé), il n'a pas été possible de pourvoir tous les contrats proposés. Les deux concours restent néanmoins très sélectifs.
- Le proportion de femmes parmi les candidats, admissibles et reçus mérite une attention : cette année, 32% parmi les candidats présents sont des candidates, 23% parmi les admissibles, 30% parmi les reçus. Ces pourcentages diffèrent un peu de ceux des années antérieures sans qu'on puisse dégager une tendance nette. Cela dit, il est préoccupant de constater que chaque année deux fois plus d'hommes que de femmes s'inscrivent et réussissent le concours de l'Agrégation Interne, alors que dans la « population de référence » (les certifiés de Mathématiques) la parité est presque parfaite. Le jury, dans son unanimité, déplore que les certifiées ne parviennent pas, autant que les certifiés, à s'engager dans une préparation au concours interne, et rappelle que cette préparation est un processus long qui demande de la disponibilité et des efforts. Il souhaite attirer l'attention des autorités académiques et des corps d'inspection sur les obstacles sociaux comme les préjugés qui dissuadent les professeures certifiées de s'engager dans ce processus.

La session 2011

Le calendrier prévu pour la session 2011 est le suivant : Écrit : jeudi 27 et vendredi 28 janvier ; oral : sans doute entre le 10 et le 17 avril à Paris.

Évolution des concours

Agrégation interne

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1996	246	2249	1150	441	246
1997	200	2113	1084	436	200
1998	200	2083	1071	432	200
1999	168	1690	1162	436	168
2000	130	1868	1257	327	130
2001	129	1944	1419	289	125
2002	129	1845	1400	288	129
2003	130	1842	1479	288	130
2004	130	1813	1382	287	130
2005	138	1897	1401	311	138
2006	110	2172	1599	273	110
2007	107	2198	1627	267	107
2008	107	2195	1682	257	107
2009	107	2124	1559	258	107
2010	114	2229	1426	267	114

CAERPA

Année	Contrats	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1996	39	375	176	64	39
1997	32	379	181	58	32
1998	28	372	169	61	28
1999	27	328	225	64	26
2000	27	359	246	46	24
2001	25	383	268	35	18
2002	23	326	229	22	10
2003	20	325	258	27	15
2004	24	311	241	21	9
2005	19	297	211	27	12
2006	19	329	240	18	13
2007	20	319	221	11	5
2008	15	356	258	22	11
2009	14	305	212	26	12
2010	12	346	207	17	8

2.2 Statistiques de l'agrégation interne 2010

Statistiques globales

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites.

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	2226	1425	267	114
dont femmes	733	457	61	35
dont Union Européenne	4	1	0	0
Moins de 50 ans	2073	1333	261	113
Moins de 45 ans	1912	1241	259	113
Moins de 40 ans	1616	1056	235	107
Moins de 35 ans	994	652	147	71
Moins de 30 ans	248	158	26	10

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	8	5	3	13	11	10	14	12	11
épreuve 2 (sur 20)	8	5	3	12	10	9	13	12	10
Total écrit (sur 200)	81	54	32	117	105	97	130	115	105

Écrit, épreuve 1 moyenne des admis 12.13
Écrit, épreuve 2 moyenne des admis 11.83
(le total d'écrit est ramené sur 20)

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	1	1	1	2	2	2
19	1	1	1	1	1	1	3	3	3
18	1	1	1	2	2	2	7	7	7
17	3	3	3	4	4	4	7	7	7
16	8	8	8	10	10	10	11	11	11
15	10	10	10	19	19	18	19	19	17
14	18	18	16	40	40	31	33	33	25
13	36	36	31	68	66	44	56	56	40
12	57	57	45	103	100	65	87	85	57
11	99	99	71	181	164	90	127	119	72
10	180	180	98	242	208	98	211	178	91
9	275	267	114	334	243	107	326	233	109
8	371	267	114	437	256	112	430	252	110
7	506	267	114	573	266	114	553	264	113
6	640	267	114	718	267	114	658	265	113
5	782	267	114	829	267	114	839	265	113
4	946	267	114	1001	267	114	994	267	114
3	1100	267	114	1156	267	114	1157	267	114
2	1237	267	114	1295	267	114	1298	267	114
1	1363	267	114	1439	267	114	1413	267	114
0	1425	267	114	1475	267	114	1444	267	114

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	14	10	8	16	13	11
épreuve 2 (sur 20)	13	10	7	15	13	11
Total général (sur 400)	241	211	186	260	244	233

le total général est ramené sur 20

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	7	7	3	3
18	1	1	9	9	7	7
17	1	1	20	20	11	11
16	2	2	31	31	21	20
15	4	4	45	41	34	31
14	12	12	63	52	53	47
13	31	31	82	67	78	61
12	69	69	105	84	95	73
11	102	102	126	90	120	86
10	154	114	158	103	137	95
9	208	114	177	109	153	100
8	240	114	196	110	180	107
7	253	114	215	112	200	109
6	254	114	229	114	217	111
5	254	114	241	114	240	113
4	254	114	253	114	253	114
3	254	114	254	114	255	114
2	254	114	254	114	255	114
1	254	114	254	114	255	114
0	254	114	254	114	255	114

Statistiques par académie

	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	114	71	13	6
BESANCON	27	18	8	4
BORDEAUX	88	56	13	5
CAEN	37	23	4	0
CLERMONT-FERRAND	53	37	6	0
DIJON	52	42	10	2
GRENOBLE	83	61	11	8
LILLE	160	98	16	7
LYON	93	57	7	2
MONTPELLIER	96	55	12	10
NANCY METZ	85	46	11	9
POITIERS	54	40	4	3
RENNES	46	31	4	1
STRASBOURG	58	41	7	2
TOULOUSE	101	61	11	4
NANTES	58	32	6	3
ORLEANS-TOURS	69	48	5	2
REIMS	29	20	4	1
AMIENS	65	40	6	1
ROUEN	59	38	3	1
LIMOGES	22	12	2	1
NICE	93	56	11	4
CORSE	11	6	2	0
LA REUNION	84	61	16	6
MARTINIQUE	27	14	2	1
GUADELOUPE	40	22	7	3
GUYANNE	28	12	1	0
PARIS/CRET/VERS	457	306	59	27
NOUVELLE CALEDONIE	11	3	1	1
POLYNESIE	13	9	2	0
MAYOTTE	16	10	3	0

Statistiques par centre d'écrit

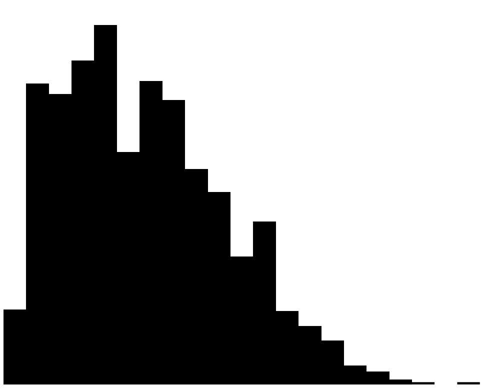
	I	P	a	A
DIVERS	18	9	2	1
AIX	114	71	13	6
AJACCIO	11	6	2	0
AMIENS	65	40	6	1
BESANCON	27	18	8	4
BORDEAUX	70	50	12	5
CAEN	37	23	4	0
CLERMONT-FERRAND	53	37	6	0
DIJON	52	42	10	2
GRENOBLE	83	61	11	8
LILLE	160	98	16	7
LIMOGES	22	12	2	1
LYON	93	57	7	2
MONTPELLIER	96	55	12	10
NANCY	85	46	11	9
NANTES	58	32	6	3
NICE	92	55	10	4
ORLEANS	69	48	5	2
PARIS	457	306	59	27
PAU	18	6	1	0
POITIERS	48	35	4	3
REIMS	29	20	4	1
RENNES	46	31	4	1
ROUEN	59	38	3	1
STRASBOURG	58	41	7	2
TOULOUSE	101	61	11	4
CAYENNE	28	12	1	0
DZAOUDZI-MAMOUT	16	10	3	0
FORT DE FRANCE	27	14	2	1
PAPEETE	13	9	2	0
POINTE A PITRE	40	22	7	3
SAINT DENIS REUNION	84	61	16	6

Statistiques par grade et par profession

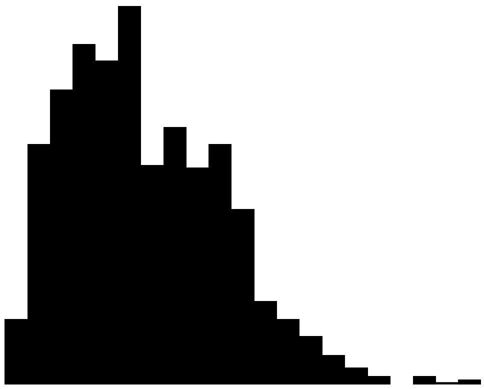
Catégories (grades)				
	I	P	a	A
DIVERS	19	11	1	0
ENS.FPE.TIT	76	44	5	2
AG FPE	37	18	4	2
AGREGE	20	7	1	1
CERTIFIE	1944	1279	250	109
P.L.P.	105	53	5	0
PROF. ECOLES	28	14	1	0

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	1	1	0	0
ENS.TIT.MEN	2113	1361	257	110
AG.FONC.PUB.ETA	115	64	10	4

Statistiques par épreuve



Écrit 1



Écrit 2

Oral 1

Oral 2

Seuil d'admissibilité : 91.00/200 (9.10/20)
Seuil d'admission : 216.00/400 (10.80/20)

2.3 Statistiques du CAERPA 2010

Statistiques globales

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites.

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	346	207	17	8
dont femmes	125	75	5	3
Moins de 50 ans	312	185	17	8
Moins de 45 ans	280	168	16	8
Moins de 40 ans	231	140	16	8
Moins de 35 ans	136	85	9	5
Moins de 30 ans	32	21	2	1

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	6	4	2	13	11	10	13	11	11
épreuve 2 (sur 20)	7	4	2	12	11	10	12	11	10
Total écrit (sur 200)	65	38	20	122	108	103	122	113	106

Écrit, épreuve 1 moyenne des admis 11.90

Écrit, épreuve 2 moyenne des admis 10.57

(le total d'écrit est ramené sur 20)

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	1	1	1	0	0	0
16	0	0	0	2	2	1	0	0	0
15	0	0	0	2	2	1	0	0	0
14	0	0	0	2	2	1	0	0	0
13	2	2	1	4	4	3	3	3	0
12	5	5	2	6	5	3	7	7	3
11	7	7	4	10	9	6	9	8	4
10	15	15	7	19	14	7	20	15	7
9	22	17	8	23	15	8	32	16	7
8	32	17	8	37	17	8	44	17	8
7	42	17	8	52	17	8	52	17	8
6	65	17	8	65	17	8	68	17	8
5	78	17	8	84	17	8	94	17	8
4	99	17	8	113	17	8	115	17	8
3	134	17	8	147	17	8	139	17	8
2	156	17	8	167	17	8	174	17	8
1	185	17	8	200	17	8	201	17	8
0	207	17	8	215	17	8	210	17	8

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	12	11	8	13	12	10
épreuve 2 (sur 20)	15	11	7	15	12	11
Total général (sur 400)	231	219	201	252	229	222

le total général est ramené sur 20

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
18	0	0	1	1	0	0
17	0	0	1	1	0	0
16	0	0	1	1	1	1
15	0	0	1	1	3	3
14	0	0	1	1	3	3
13	1	1	2	2	4	3
12	2	2	6	4	5	4
11	6	6	7	5	8	7
10	11	8	9	7	8	7
9	12	8	10	8	10	8
8	13	8	11	8	10	8
7	14	8	12	8	11	8
6	15	8	12	8	12	8
5	15	8	12	8	13	8
4	15	8	14	8	15	8
3	15	8	15	8	15	8
2	15	8	15	8	15	8
1	15	8	15	8	15	8
0	15	8	15	8	15	8

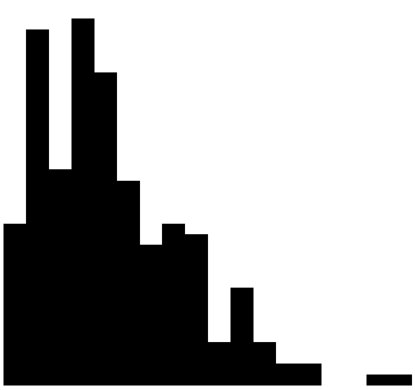
Statistiques par académies

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	15	10	1	0
BESANCON	3	2	0	0
BORDEAUX	17	11	1	0
CAEN	3	2	0	0
CLERMONT-FERRAND	9	7	1	1
DIJON	5	3	0	0
GRENOBLE	14	6	0	0
LILLE	28	15	2	0
LYON	16	10	0	0
MONTPELLIER	13	5	2	1
NANCY METZ	14	9	1	0
POITIERS	10	7	0	0
RENNES	24	17	1	1
STRASBOURG	9	5	0	0
TOULOUSE	13	4	2	2
NANTES	28	18	1	0
ORLEANS-TOURS	7	5	0	0
REIMS	6	2	0	0
AMIENS	7	6	0	0
ROUEN	5	3	0	0
LIMOGES	2	1	0	0
NICE	5	4	0	0
LA REUNION	3	3	0	0
MARTINIQUE	1	0	0	0
GUADELOUPE	2	0	0	0
GUYANNE	1	1	0	0
PARIS/CRET/VERS	77	46	5	3
NOUVELLE CALEDONIE	3	1	0	0
POLYNESIE	6	4	0	0

Statistiques par centre d'écrit

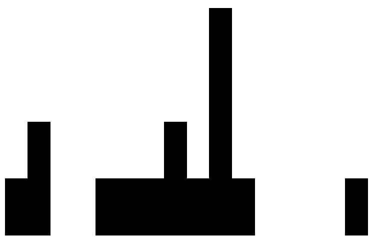
Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	113	68	0	0
AIX	15	10	1	0
BORDEAUX	12	8	1	0
CLERMONT-FERRAND	9	7	1	1
LILLE	28	15	2	0
MONTPELLIER	13	5	2	1
NANCY	14	9	1	0
NANTES	28	18	1	0
PARIS	77	46	5	3
RENNES	24	17	1	1
TOULOUSE	13	4	2	2

Statistiques par épreuve

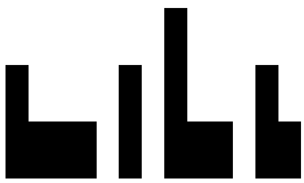


Écrit 1

Écrit 2



Oral 1



Oral 2

Seuil d'admissibilité : 91.00/200 (9.10/20)
Seuil d'admission : 216.00/400 (10.80/20)

Chapitre 3

Programme du concours pour la prochaine session

On trouvera ci-dessous le programme du concours pour la session 2011.
Ce programme fut publié sur le site SIAC2 :
http ://www.education.gouv.fr/cid51686/programmes-des-concours.html
Un accès direct est possible, en suivant le lien :
http ://media.education.gouv.fr/file/programmes_2011/31/8/agreg_internes_145318.pdf

L'attention des candidats est particulièrement attirée sur l'évolution en cours des programmes des classes de Seconde et Première.

Chaque professeur de mathématiques devrait avoir une vue personnelle, globale et cohérente de ses connaissances dans la discipline à travers son histoire et ses liens avec les autres sciences. La préparation à l'agrégation interne peut être l'occasion d'une fructueuse réflexion. C'est dans cet esprit qu'il a été procédé à cette mise à jour du programme complémentaire, la connaissance de ceux de toutes les sections de l'enseignement secondaire étant d'autre part demandée aux candidats. Ce texte décrit un ensemble de connaissances souhaitable pour un professeur agrégé. Il sera périodiquement remis à jour. Il ne doit pas être interprété de façon rigide et formaliste. Son but est surtout d'aider les candidats dans leur réflexion et dans le nécessaire effort d'unification de leurs connaissances. S'il est commode de présenter un programme en rubriques, ce découpage ne doit pas dégénérer en cloisonnement. C'est ainsi que sont proposés certains rapprochements pouvant être complétés par d'autres. Ce texte comporte aussi des répétitions quand une même notion intervient à plusieurs endroits. Ainsi, une même notion peut être d'abord approchée dans un cadre particulier, puis sous un aspect plus général.

L'attention des candidats est attirée sur la partie **C** du programme, relative à la seconde épreuve orale (dite d'exemples et exercices) et qui est appelée à évoluer d'année en année.

A – PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Ce programme comporte tous les programmes en vigueur, des classes de la seconde à la terminale incluses, et dans toutes les sections.

B – PROGRAMME COMPLÉMENTAIRE

1 Ensembles

Vocabulaire de la théorie des ensembles. Produit d'un nombre fini d'ensembles. Applications. Relations d'ordre.

Ensemble **N** des entiers naturels. Ensembles dénombrables. Dénombrabilité de l'union d'une suite d'ensembles dénombrables. Relations d'équivalence et ensemble quotient.

2 Algorithmique et informatique

Notions de variable et de type. Instructions d'affectation, conditionnelles, d'itération.

Fonctions et procédures (ou sous-programmes) ; passage de paramètre, variables locales, notion de récursivité. Rédaction en français ou dans un langage au choix du candidat de programmes ne comportant qu'un faible nombre d'instructions et pouvant utiliser des fonctions (ou sous-programmes).

Aucun développement théorique n'est exigé.

Exemples d'algorithmes illustrant les notions figurant dans le présent programme.

3 Algèbre générale

3.1 Extensions successives de la notion de nombre

Anneau **Z** des entiers relatifs. Division euclidienne. Sous-groupes additifs et idéaux de **Z**. Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bachet-Bézout. Algorithme d'Euclide. Congruences. Applications arithmétiques des anneaux quotients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Théorème chinois. Groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications à des problèmes de calendriers. Exemples de méthodes de codage et de cryptage. Équations diophantiennes $ax + by = c$.

Corps **Q** des nombres rationnels, **R** des nombres réels, **C** des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.

Non-dénombrabilité de **R**.

Groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines n-ièmes de l'unité. Relations d'inclusion entre ces groupes. Polygones réguliers.

3.2 Anneaux et corps

Définition (les anneaux sont supposés unitaires par définition). Formule du binôme pour des éléments commutables. Idéaux d'un anneau commutatif. Morphismes d'anneaux. Anneaux commutatifs intègres. Anneaux quotients. Anneaux principaux. Exemple des entiers de Gauss, applications.

Sous-corps. Corps premier. Caractéristique d'un corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Éléments algébriques, transcendants sur un sous-corps. Dénombrabilité du corps des nombres algébriques sur **Q**.

3.3 Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif K

Algèbre $K[\mathrm{X}]$. Division euclidienne. Idéaux de $K[\mathrm{X}]$. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Polynômes irréductibles. Décomposition en produit de facteurs irréductibles.

Fonctions polynômes. Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés. Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes. Cas où $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p étant un nombre premier. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.

Théorème de d'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles sur **R** et **C**.

Dérivation des polynômes. Identité de Taylor lorsque la caractéristique est nulle.

3.4 Fractions rationnelles sur un corps commutatif K

Corps $K(\mathrm{X})$ des fractions rationnelles. Forme irréductible. Fonctions rationnelles, zéros, pôles, ordre de multiplicité des zéros et pôles.

Décomposition en éléments simples. Cas où le corps est **R** ou **C**.

Exemples simples de problèmes d'élimination ; applications à la géométrie.

4 Groupes et géométrie

Les diverses notions sur les groupes ont vocation à être illustrées dans des situations géométriques (par exemple, isométries d'un tétraèdre régulier, d'un cube, etc.).

Groupes, morphismes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques, ordre d'un élément. Théorème de Lagrange. Image et noyau d'un morphisme de groupes.

Sous-groupe distingué (ou normal). Groupe quotient.

Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Stabilisateurs. Formule des classes. Éléments conjugués, classes de conjugaison, sous-groupes conjugués. Automorphismes intérieurs d'un groupe.

Polygones réguliers et groupes diédraux.

Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique ; cycles, génération par les transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné.

Groupes $GL(E)$ et $SL(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Groupes $O(E)$ et $SO(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien. Groupes $U(E)$ et $SU(E)$ où E est un espace hermitien. Groupe affine, groupe des homothéties et translations d'un espace affine. Groupe des isométries et des déplacements d'un espace affine euclidien. Formes réduites des isométries affines en dimension 2 et 3. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace. Groupe des similitudes directes et indirectes d'un plan affine euclidien.

5 Algèbre linéaire sur un sous-corps de C

5.1 Espaces vectoriels et algèbres

Définitions. Applications linéaires. Espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$. Algèbre $\mathscr{L}(E)$. Groupe linéaire $GL(E)$. Espace produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels. Image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs. Endomorphismes involutifs.

Familles libres, génératrices, bases.

Étant donné u de $\mathscr{L}(E, F)$, isomorphisme entre $\mathrm{Im}(u)$ et tout supplémentaire de $\ker(u)$.

Dans la suite, les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.

5.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. Théorèmes de la dimension, de la base incomplète. Dimension d'un sous-espace. Rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires.

Formule liant les dimensions de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation des automorphismes.

5.3 Matrices

Espaces $\mathscr{M}_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans K. Isomorphisme canonique avec $\mathscr{L}(K^q, K^p)$. Produit matriciel. Matrices inversibles. Groupe $GL(n, K)$.

Matrice d'une application linéaire entre espaces vectoriels munis de bases. Matrice de passage. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes et caractérisation par le rang. Taille maximale des sous-matrices carrées inversibles d'une matrice donnée. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

Matrice d'un endomorphisme d'un espace muni d'une base, matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

5.4 Systèmes d'équations linéaires et opérations élémentaires

Systèmes d'équations linéaires, matrice associée. Systèmes de Cramer. Applications à des problèmes de géométrie.

Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.

Application des opérations élémentaires à la résolution de systèmes linéaires, au calcul du rang et à l'inversion de matrices.

Applications linéaires associées aux opérations élémentaires : dilatations et transvections. Génération de $GL(n,K)$ et $SL(n,K)$.

5.5 Déterminants

Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base. Déterminant d'un endomorphisme, d'un composé d'endomorphismes. Caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. Mineurs, cofacteurs, développement relativement à une ligne ou une colonne. Calcul par opérations élémentaires.

Comatrice. Formules de Cramer. Orientation d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Exemples de calcul de volumes.

Groupes $SL(E)$ et $SL(n,K)$.

5.6 Dualité

Formes linéaires et hyperplans. Équation d'un hyperplan. Dual E^* d'un espace vectoriel E. Base duale d'une base. Application aux polynômes d'interpolation de Lagrange. Bijection, à l'aide de l'orthogonalité, entre l'ensemble des sous-espaces de E et l'ensemble des sous-espaces de E^*. Orthogonal d'une somme ou d'une intersection de deux sous-espaces. Dimension de l'orthogonal.

Transposée d'une application linéaire. Rang de la transposée.

5.7 Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables par un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme ; endomorphismes diagonalisables.

Algèbre $K[u]$ des endomorphismes polynomiaux en un endomorphisme u de E. Polynôme annulateur, polynôme minimal. Décomposition des noyaux.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Triangulation d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, lorsque le polynôme caractéristique est scindé. Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé. Sous-espaces caractéristiques. Théorème de Cayley-Hamilton.

Critères de diagonalisabilité : la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée ; il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Diagonalisation simultanée d'un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux.

Diagonalisation par blocs. Décomposition de Dunford : lorsque le polynôme caractéristique est scindé, existence et unicité de l'écriture $u = d + n$ où d est diagonalisable et n nilpotent avec $d \circ n = n \circ d$.

Application de la réduction des endomorphismes à l'analyse (suites récurrentes linéaires, systèmes différentiels linéaires, etc.).

5.8 Cas où le corps K est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

Application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie à la topologie de $\mathscr{L}(E)$. Définition de $\exp(u)$, application aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Exemples de parties denses de $\mathscr{L}(E)$: $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathscr{L}(E)$; si K=$\mathbf{C}$, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est dense dans $\mathscr{L}(E)$.

5.9 Formes quadratiques

Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques. Morphisme de E vers E^* canoniquement associé à une forme bilinéaire. Matrice relativement à une base. Matrices congruentes.

Bases orthogonales. Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Loi d'inertie et signature dans le cas réel. Application aux coniques et quadriques. Application à l'analyse des données.

6 Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne

Les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.

6.1 Espaces euclidiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme euclidienne. Identité du parallélogramme. Isomorphisme canonique avec le dual. Orthogonalité. Bases orthonormales. Orthonormalisation de Schmidt. Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales. Adjoint d'un endomorphisme et matrice associée dans une base orthonormale. Groupe orthogonal $O(E)$ et spécial orthogonal $SO(E)$. Génération de $O(E)$ par les réflexions orthogonales (ou symétries orthogonales par rapport à un hyperplan).

Endomorphismes symétriques, réduction dans une base orthonormale. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles dont l'une est définie positive. Application aux éléments de symétrie des coniques et quadriques dans un espace euclidien. Ellipsoïde d'inertie. Application à l'analyse des données.

Application à l'étude d'une surface au voisinage d'un point régulier.

Endomorphismes symétriques positifs et applications (norme d'un endomorphisme).

6.2 Angles

Groupe $SO(2)$, sa commutativité, angles dans le plan euclidien orienté. Sinus et cosinus d'un angle. Exponentielle complexe. Nombre π. Fonctions trigonométriques circulaires. Morphisme canonique de $\mathbf{R}$ vers $SO(2)$. Mesure des angles.

Angles orientés de droites en dimension 2.

Angles en dimension 3 : angle d'une rotation dont l'axe est orienté. Génération de $SO(E)$ par les demi-tours (retournements).

Similitudes vectorielles en dimension 2 et 3.

6.3 Calcul matriciel et normes euclidiennes

Projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace. Matrice de Gram. Distance d'un point à un sous-espace. Problème des moindres carrés.

6.4 Calculs vectoriels en dimension 3

Produit vectoriel. Produit mixte.

6.5 Espaces hermitiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme hermitienne. Sommes directes orthogonales. Bases orthonormales. Adjoint d'un endomorphisme, matrice dans une base orthonormale. Endomorphismes hermitiens. Groupe unitaire $U(E)$ et spécial unitaire $SU(E)$.

Réduction d'un endomorphisme hermitien, endomorphismes hermitiens positifs, applications (norme d'un endomorphisme).

7 Géométrie affine réelle en dimension finie

Définition d'un espace affine réel. Espace vectoriel associé. Sous-espaces affines, direction d'un sous-espace affine. Droites, plans, hyperplans.

Repères. Orientation. Volume algébrique d'un parallélépipède orienté.

Applications affines. Projecteurs. Groupe affine. Isomorphisme entre le stabilisateur d'un point et le groupe linéaire. Symétries. Groupe des homothéties et translations. Effet d'une application affine sur les volumes.

Barycentres. Repères et coordonnées barycentriques. Isobarycentre.

Parties convexes. Intersection, images directe et réciproque par une application affine. Enveloppe convexe d'une partie. Exemples de problèmes d'optimisation.

8 Géométrie affine euclidienne orientée

8.1 Préliminaires

Pour toutes les situations géométriques, on distinguera les propriétés de caractère affine et celles de nature métrique (ou euclidienne), ainsi pour les coniques ou pour certaines notions différentielles (tangentes, normales, courbure, etc.).

Exemples d'utilisation de repères pour traiter des problèmes de géométrie.

8.2 Généralités

Espaces affines euclidiens. Distance de deux points. Inégalité triangulaire.

Groupes des isométries et des déplacements. Génération du groupe des isométries par les réflexions, du groupe des déplacements par les demi-tours en dimension 3.

Décomposition canonique d'une isométrie en $u = t \circ f = f \circ t$ où t est une translation et f une isométrie admettant au moins un point fixe. Application à la classification des isométries en dimension 2 et 3.

Exemples de groupes d'isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers et groupes diédraux. Tétraèdres réguliers, cubes, octaèdres.

Groupe des similitudes affines du plan.

8.3 Géométrie plane

Propriétés angulaires du cercle (angles au centre, angles inscrits) et applications.

Géométrie du triangle, éléments remarquables. Exemples de relations métriques et trigonométriques dans le triangle.

Utilisation des nombres complexes : affixe d'un point dans un repère orthonormé direct. Exemples d'applications géométriques (polygones réguliers, géométrie des cercles).

Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical de deux cercles. Orthogonalité entre cercles.

8.4 Coniques

Définitions bifocale et par foyer et directrice. Classification par l'excentricité. Équations réduites. Image par une application affine et classification affine : ellipse, parabole, hyperbole. Exemples de propriétés géométriques communes ou spécifiques à chaque genre.

Sections planes d'un cône de révolution.

Mouvement à accélération centrale. Notions sur le mouvement des planètes.

9 Analyse réelle et complexe

9.1 Nombres réels, nombres complexes

Corps $\mathbf{R}$ des nombres réels et $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

Suites convergentes, divergentes, suites extraites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites.

Toute partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes, théorème des segments emboités. Droite numérique achevée.

Complétude de $\mathbf{R}$: toute suite de Cauchy de $\mathbf{R}$ converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de $\mathbf{R}$ on peut extraire une sous-suite convergente. Extension de ces résultats à $\mathbf{C}$.

Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.

Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (u est négligeable devant v), équivalence. Notations $u = \mathcal{O}(v)$ et $u = o(v)$.

Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Suites définies par une relation de récurrence linéaire à deux termes et à coefficients constants, ou par une relation homographique.

9.2 Séries de nombres réels ou complexes

Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. Étude de la convergence par utilisation des relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes et divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann.

Critère de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

9.3 Continuité

Fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$. Limites, continuité à droite, gauche, continuité.

Relations de comparaison entre fonctions au voisinage d'un point ou de l'infini : prépondérance, négligeabilité, équivalence. Théorème des valeurs intermédiaires. Continuité sur un segment, théorème des extremums. Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonction réciproque d'une fonction f continue strictement monotone sur un intervalle ; propriétés de la fonction réciproque f^{-1}.

Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues sur un segment par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass admis).

9.4 Dérivabilité

Dérivée à droite, à gauche en un point. Comportement de la dérivation relativement aux opérations algébriques. Dérivation d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes. Application au sens de variation et au caractère lipschitzien.

Dérivées successives. Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux. Formule de Leibniz pour la dérivée k-ième d'un produit. Composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

Fonctions convexes de classe $\mathscr{C}^1$, convexité de l'épigraphe, croissance de la dérivée, position de la courbe relativement aux cordes et aux tangentes. Cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

Formules de Taylor avec reste intégrale, de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

Étude locale des fonctions. Condition nécessaire d'extremum. Développements limités. Opérations sur les développements limités.

9.5 Fonctions usuelles

Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances. Équations fonctionnelles caractérisant ces fonctions parmi les fonctions continues. Fonctions hyperboliques directes et réciproques.

Fonctions circulaires directes et réciproques.

9.6 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition de l'intégrale de Riemann, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégration par parties, changement de variable, calculs de primitives et d'intégrales.

Convergences en moyenne et en moyenne quadratique pour les suites de fonctions. Comparaison avec la convergence uniforme.

9.7 Intégrales sur un segment d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme.

9.8 Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont supposées continues par morceaux sur l'intervalle I de définition, c'est-à-dire continues par morceaux sur tout segment contenu dans I.

Intégrale d'une fonction positive (comme borne supérieure, éventuellement infinie, des intégrales sur les segments inclus dans I). Emploi des relations de comparaison.

Une fonction définie sur I à valeurs complexes est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie.

Les trois théorèmes suivants sont admis :

Théorème de convergence monotone : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions intégrables, convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Alors f est intégrable sur I si, et seulement si, la suite des intégrales des f_n est majorée ; en ce cas, l'intégrale de f est la limite de celles des f_n.

Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des f_n.

Théorème d'intégration terme à terme : Soit une suite (u_n) de fonctions à valeurs complexes, intégrables sur I, telle que la série $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I, et telle que la série $\sum \int_I |u_n|$ converge. Alors S est intégrable sur I et on a $\int_I S = \sum_n \int_I u_n$.

9.9 Intégrales impropres

Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy.

Convergence absolue, lien avec l'intégrabilité. Emploi des relations de comparaison, de l'intégration par parties pour l'étude de la convergence. Intégration de relations de prépondérance et d'équivalence.

Pour une fonction f définie sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, comparaison entre la convergence de la série de terme général $f(n)$ $(n \geqslant a)$ et l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ (méthode des rectangles). Si f est décroissante et positive sur $[0, +\infty[$, alors la série de terme général $f(n) - \int_{[n,n+1]} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

9.10 Intégrales sur un intervalle quelconque d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorème de continuité : Soient X un ouvert de $\mathbf{R}^n$, I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et f une fonction définie sur $X \times I$ et à valeurs complexes. On suppose que, pour tout t dans I, la fonction partielle $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X et que, pour tout x dans X, la fonction partielle $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I. S'il existe une fonction g intégrable sur I et telle que, pour tout x dans X et tout t dans I, $|f(x,t)| \leqslant g(t)$, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x,t)$ sur I est continue sur X.

Théorème de dérivation : Soient X et I deux intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ et f une fonction définie sur $X \times I$ et à valeurs complexes, telle que, pour tout x dans X, la fonction partielle $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I. On suppose que f admet une dérivée partielle $f'_x(x,t)$ en tout point de $X \times I$, que pour tout t dans I, la fonction $x \mapsto f'_x(x,t)$ est continue sur X. S'il existe une fonction h intégrable sur I et telle que, pour tout x dans X et tout t dans I, $|f'_x(x,t)| \leqslant h(t)$, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x,t)$ sur I est dérivable sur X et on a $F'(x) = \int_I f'_x(x,t)dt$.

Exemples de fonctions définies par une intégrale (fonction Gamma d'Euler, transformée de Fourier, transformée de Laplace).

9.11 Analyse numérique

Approximations d'un nombre par des suites : vitesse de convergence, ordre d'un algorithme. Accélération de la convergence, méthode de Richardson-Romberg.

Approximation d'une solution d'une équation $f(x) = 0$. Méthode de dichotomie. Approximations successives, méthode de Newton. Estimation de l'erreur.

Valeurs approchées d'une intégrale : méthode du point milieu, des trapèzes, de Simpson. Estimation de l'erreur. Recherche d'une valeur approchée de la somme de certaines séries convergentes ; majoration de l'erreur.

Évaluation asymptotique du reste d'une série convergente.

Solutions approchées d'une équation différentielle $x' = f(t, x)$ par la méthode d'Euler.

9.12 Séries entières

Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Convergence normale sur tout compact du disque ouvert de convergence. Exemples de calcul du rayon de convergence. Rayon de convergence de la série dérivée.

Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence. Sur le disque ouvert de convergence, la limite du taux d'accroissement complexe de la somme est la somme de la série dérivée.

Série de Taylor d'une fonction de variable réelle de classe $\mathscr{C}^\infty$. Notion de fonction développable en série entière par rapport à une variable réelle ou complexe, exemples.

Exponentielle complexe, exponentielle d'une somme, nombre π, fonctions sinus et cosinus.

Lien avec la mesure des angles.

10 Topologie et analyse fonctionnelle

10.1 Topologie des espaces métriques

Distance, boules ouvertes, boules fermées. Parties ouvertes, parties fermées. Voisinages. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Distance à une partie, diamètre d'une partie. Parties denses, points isolés, points d'accumulation. Produits finis d'espaces métriques. Normes usuelles sur les espaces $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$.

Suites, limites, valeurs d'adhérence, sous-suites, suites de Cauchy. Caractérisation de l'adhérence par les suites.

Applications d'un espace métrique dans un autre, continuité en un point, caractérisation par les suites. Continuité sur une partie, caractérisation par les images réciproques des ouverts ou des fermés. Homéomorphismes. Applications uniformément continues. Algèbre des fonctions numériques continues.

10.2 Espaces vectoriels normés sur R ou C

Normes. Distance associée à une norme. Normes équivalentes. Continuité des opérations (addition, multiplication par un scalaire). Applications linéaires continues, normes de ces applications.

10.3 Espaces métriques compacts

Définition séquentielle. Parties compactes d'un compact. Parties compactes de **R** et **C**. Produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts. Parties compactes de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$.

Image continue d'un compact. Théorème de Heine de continuité uniforme des applications continues sur un compact.

10.4 Espaces métriques connexes

Définitions. Parties connexes. Union de parties connexes d'intersection non vide. Parties connexes de **R**. Image continue d'un connexe. Théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs : elle implique la connexité et lui équivaut sur un ouvert d'un espace vectoriel normé.

10.5 Espaces métriques complets

Définition. Parties complètes d'un espace complet. Exemples de **R** et **C**.

Méthode des approximations successives, théorème du point fixe pour les contractions d'un espace complet dans lui-même.

Critère de Cauchy pour l'existence de la limite d'une application en un point.

10.6 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème d'équivalence des normes. Les parties compactes sont les fermés bornés. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet. Continuité des applications linéaires et multilinéaires en dimension finie.

10.7 Espaces de Banach

Définition. Critère de Cauchy pour les séries. L'absolue convergence d'une série implique la convergence.

Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions. Espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach vers un autre.

Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple, uniforme, uniforme sur tout compact. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Critère de Cauchy uniforme. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ simplement convergente et dont la suite des dérivées converge uniformément.

Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple et uniforme. Convergence normale. Critère de Cauchy uniforme. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel.

Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

10.8 Espaces préhilbertiens

Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée. Théorème de Pythagore. Familles orthonormales. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.

Exemples de produits scalaires ; exemples de suites de polynômes orthogonaux.

10.9 Séries de Fourier

Polynômes trigonométriques, orthonormalité des fonctions $x \mapsto e^{inx}$. Coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$ d'une fonction 2π-périodique f continue par morceaux. Sommes partielles

$$S_n(f,x) = \sum_{-n \leqslant k \leqslant n} c_k(f) e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$$

Meilleure approximation en moyenne quadratique. Identité de Parseval et convergence en moyenne quadratique si f est continue par morceaux.

Théorèmes de convergence de Dirichlet et Fejer ; approximation uniforme d'une fonction continue et périodique par des polynômes trigonométriques (Weierstrass). Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

11 Géométrie différentielle

Les notions qui suivent doivent être illustrées par des exemples.

11.1 Courbes paramétrées en dimension 2 et 3

Étude locale d'une courbe paramétrée du plan. Changement birégulier de paramètre. Tangente, concavité, forme d'un arc au voisinage d'un point régulier ou singulier. Construction d'une courbe en coordonnées polaires.

Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace. Plan osculateur.

11.2 Propriétés métriques des courbes

Longueur d'un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$. Abscisse curviligne. En dimension 2, repère de Frenet. Courbure, centre de courbure, cercle osculateur.

11.3 Notions de cinématique

Vitesse, accélération. Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, circulaires, à accélération centrale. Oscillateurs harmoniques. Exemples de problèmes de mécanique (pendule, chute des corps, mouvements des planètes).

12 Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$.

12.1 Fonctions différentiables

Dérivée selon un vecteur. Développement limité à l'ordre 1. Différentiabilité en un point. Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Matrice jacobienne, déterminant jacobien. Différentielle d'une fonction composée. Inégalité des accroissements finis sur un ouvert convexe (admise).

Une fonction f définie sur un ouvert Ω est dite de classe $\mathscr{C}^1$ si l'application qui à tout point a de Ω fait correspondre la différentielle de f en a est continue.

Théorème : pour qu'une fonction soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω, il faut et il suffit qu'elle admette des dérivées partielles continues sur Ω.

Composition des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Caractérisation des constantes parmi les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert connexe.

Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Théorème de Schwarz pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

Gradient d'une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$. Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Extremums locaux d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de deux variables en un point où $rt - s^2 \neq 0$. Exemples de problèmes d'extremums issus de la géométrie.

Difféomorphismes. Théorèmes (admis) d'inversion locale et des fonctions implicites. Application à la caractérisation des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathscr{C}^k$.

12.2 Équations différentielles

12.2.1 Équations différentielles linéaires

Systèmes linéaires $X' = A(t)X + B(t)$, où A (resp. B) est une application continue d'un intervalle I dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{C}^n$).

Théorème (admis) d'existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.

Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène. Méthode de la variation des constantes.

Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme, application au problème de Cauchy ; résolution du système $X' = AX$ par diagonalisation ou triangularisation de A, ou au moyen de l'exponentielle de tA, t réel.

Équations linéaires scalaires $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où a, b, c sont continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Système du premier ordre associé, étude du problème de Cauchy ; solution de l'équation sans second membre, méthode de variation des constantes. Résolution lorsqu'une solution de l'équation sans second membre ne s'annulant pas sur I est connue.

12.2.2 Notions sur les équations différentielles non linéaires

Solutions d'une équation $x' = f(t, x)$, ou $x'' = f(t, x, x')$, où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$. Théorème (admis) de Cauchy-Lipschitz dans le cas $\mathscr{C}^1$: existence et unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy.

Exemples d'études qualitatives.

Résolution d'équations à variables séparables ou homogènes ; exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction en liaison avec des propriétés d'invariance.

Applications en physique (trajectoires dans un champ de vecteurs) et en géométrie différentielle.

13 Calcul intégral et probabilités

13.1 Intégrales multiples

Tous les théorèmes de ce paragraphe sont admis.

Intégrales curvilignes, longueur d'un arc de courbe, travail d'une force.

Formule de Fubini et définition de l'intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$. Adaptation à l'intégrale triple.

Théorème de Fubini-Tonelli : Si f est une fonction de deux variables continue positive sur un rectangle borné ou non, on peut intervertir l'ordre des intégrations ; lorsque la valeur commune de ces intégrales est finie, f est dite intégrable et son intégrale double est cette valeur commune.

Si f est une fonction complexe de deux variables continue sur un rectangle borné ou non, on dit que f est intégrable si son module est intégrable. Dans ce cas, on peut intervertir l'ordre des intégrations et l'intégrale de f est la valeur commune des deux intégrales superposées.

Extension des résultats précédents au cas de fonctions de plusieurs variables.

Extension au cas du produit d'une fonction de plusieurs variables continue positive par une fonction indicatrice d'un ensemble «géométriquement simple». Linéarité et additivité relativement à la fonction et relativement aux ensembles.

Applications à des calculs d'intégrales.

Théorème du changement de variables ; passage en coordonnées polaires.

Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.

13.2 Modélisation d'une expérience aléatoire

Espace Ω des épreuves (ou des évènements élémentaires) ; tribu (ou σ-algèbre) $\mathscr{F}$ des évènements ; mesure de probabilité P sur cette tribu. Étude d'exemples dans le cas où Ω est fini ou infini dénombrable.

13.3 Espace probabilisé

Propriétés d'une probabilité. Probabilité conditionnelle $P_B(A)$ de A sachant B si $P(B)$ est non nul. Formule des probabilités composées (ou totales) et formule de Bayes. Indépendance d'un ensemble fini d'évènements.

13.4 Variables aléatoires réelles

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r. en abrégé) toute application X de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que l'image réciproque $X^{-1}(I)$ de tout intervalle I de $\mathbf{R}$ appartienne à la tribu $\mathscr{F}$. On admettra que la somme, ou le produit, de v.a.r. est une v.a.r..

On se bornera à l'étude des deux familles suivantes de v.a.r. :

13.4.1 Variables aléatoires réelles discrètes

Une v.a.r. est dite discrète si elle prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs. Loi et fonction de répartition d'une v.a.r. discrète. Moments d'une v.a.r. discrète : espérance, variance et écart type. Espérance d'une somme de v.a.r. discrètes. Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbf{N}$. Lois discrètes usuelles : loi hypergéométrique, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique et loi de Poisson.

13.4.2 Variables aléatoires réelles possédant une loi avec densité

On appelle densité de probabilité sur $\mathbf{R}$ toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ intégrable sur $\mathbf{R}$ et d'intégrale égale à 1 (on se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe **9.8**).

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$. On dit qu'une v.a.r. X possède la loi de densité f si, pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, $P(\{X \in I\}) = \displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

Fonction de répartition et moments ; espérance, variance et écart type d'une v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance d'une somme de v.a.r. possédant une densité (résultat admis). Lois usuelles possédant une densité : loi uniforme sur un intervalle borné ; loi exponentielle ; loi de Cauchy ; loi normale.

On admettra le résultat suivant (théorème de transfert) : si X est une v.a.r. de loi de densité f et si Φ est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue par morceaux sur tout segment et telle que la fonction $|\Phi|f$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$, alors $\Phi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par : $\mathrm{E}(\Phi(X)) = \int_{\mathbf{R}} \Phi(x)f(x)\,\mathrm{d}x$.

13.5 Vecteurs aléatoires

On dira qu'une application $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans $\mathbf{R}^p$ est un *vecteur aléatoire* si chacune de ses composantes est une v.a.r. On se limitera aux deux cas suivants :

13.5.1 Vecteurs aléatoires discrets

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans $\mathbf{R}^p$ est dit discret si chacune de ses composantes est une v.a.r. discrète.

Loi d'un vecteur aléatoire X. Indépendance de p v.a.r. discrètes. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. discrètes. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. discrètes indépendantes.

13.5.2 Vecteurs aléatoires possédant une loi avec densité

On appelle densité de probabilité sur $\mathbf{R}^p$ toute fonction f de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}_+$, intégrable sur $\mathbf{R}^p$ et d'intégrale égale à 1 (on se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe **13.1**). Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}^p$. On dit qu'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ possède la loi de densité f si on a, pour tous intervalles $I_1, \ldots, I_p$ de $\mathbf{R}$,

$$P(\{X_1 \in I_1\} \cap \cdots \cap \{X_p \in I_p\}) = \int_{I_1} \ldots \int_{I_p} f(x_1, \ldots, x_p)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_p\ .$$

Soit $X = (X_1, \ldots, X_p)$ un vecteur aléatoire de loi de densité f. Soit Ψ un produit d'une fonction continue de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$ par une fonction indicatrice d'un domaine « géométriquement simple » de $\mathbf{R}^p$ et telle que la fonction $|\Psi|f$ soit intégrable sur $\mathbf{R}^p$. On admettra que $\Psi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par :

$$\mathrm{E}(\Psi(X)) = \int_{\mathbf{R}} \ldots \int_{\mathbf{R}} \Psi(x_1, \ldots, x_p) f(x_1, \ldots, x_p)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_p\ .$$

Indépendance de p v.a.r. possédant une loi avec densité. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. indépendantes et possédant une loi avec densité. Application aux loi normales.

13.6 Théorèmes limites

Suites de v.a.r. indépendantes. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grands nombres.

Lemme de Borel-Cantelli.

Les résultats suivants sont admis : loi forte des grands nombres pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées possédant une espérance. Théorème de la limite centrale pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées et de variance finie.

Approximations de la loi binomiale par la loi de Poisson et par la loi normale.

C – SECONDE ÉPREUVE ORALE

La seconde épreuve orale, dite d'exemples et exercices, repose sur les programmes détaillés dans les parties **A** et **B**. Au cours de cette épreuve, le candidat présentera un choix d'exemples ou d'exercices dont l'un pourra intégrer soit une activité de programmation simple (voir notamment **B.2**) soit faire appel à un outil logiciel. Il est précisé que le matériel informatique mis à la disposition des candidats pendant le temps de préparation fonctionne sous le système Linux, et comportera les logiciels de la liste précisée ci-dessous. Les versions des logiciels ne sont données qu'à titre indicatif et sont susceptibles d'être modifiées.

1 Langages et environnements de programmation :

- Free Pascal version 2.2, environnement de programmation Lazarus
- Python version 2.6, environnement de programmation DrPython

2 Logiciels :

- Cabri® II Plus (Cabrilog)
- Cabri® 3D (Cabrilog)
- CaRMetal version 3
- Casio® ClassPad Manager version 3
- Geogebra version 3.2
- Geoplan / Geospace (avec nombres complexes)
- Maple® version 12 (MapleSoft)
- Maxima version 5
- OpenOffice.org version 3
- Scilab version 5
- TI-Nspire™CAS (Texas Instruments Education) version 2
- Xcas version 0.8

Chapitre 4

Rapport sur les épreuves écrites

4.1 Énoncé de la première épreuve écrite

– NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES –

- Étant donnés deux entiers p et q tels que $p \leqslant q$, on note $[p, q]$ l'ensemble des **entiers** k vérifiant $p \leqslant k \leqslant q$.
- Dans ce problème K désigne un corps commutatif de caractéristique différente de deux.
- Pour tout polynôme P de $K[X]$, on note $d^\circ P$ le degré de P (on rappelle que, par convention, le polynôme 0 a pour degré $-\infty$).
- Un polynôme non nul P de $K[X]$ est dit normalisé si le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.
- Pour tout entier naturel m, $K_m[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $K[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à m.
- Si E est un K-espace vectoriel, on notera E^* son espace dual.
- Soient E et F deux K-espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E à valeurs dans F. Pour toute application $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle transposée de f l'application (linéaire) notée ${}^t\!f$ définie sur F^* et à valeurs dans E^* par :

$$\forall\, \varphi \in F^*,\ {}^t\!f\,(\varphi) = \varphi \circ f$$

- On note $\mathcal{M}_p(K)$ l'algèbre des matrices carrées de taille p à coefficients dans K.
- On identifiera les vecteurs de K^p aux matrices correspondantes de $\mathcal{M}_{p,1}(K)$.
- Si A et B sont deux polynômes de $K[X]$, avec B non nul, on note $A \bmod B$ le reste de la division euclidienne de A par B.
- Soient A, B, C des polynômes de $K[X]$. On écrira $A \equiv B \bmod C$ si C divise $A - B$.
- Pour tout couple $(A, B) \in K[X]^2$ avec $(A, B) \neq (0, 0)$, on note $A \wedge B$ le pgcd du couple (A, B) (c'est donc un polynôme normalisé).
- Soit E un K-espace vectoriel non nul. On note $\mathcal{S}(E)$ l'espace vectoriel des suites de E indexées par $\mathbf{N}$. On aura l'occasion d'utiliser l'application $\sigma : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(E)$ qui à une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E associe la suite $\sigma(u)$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ [\sigma(u)]_n = u_{n+1}$$

Cette application σ, nommée **décalage d'indices**, est clairement un endomorphisme de l'espace $\mathcal{S}(E)$.

- Soit $P = \sum_{k=0}^{r} p_k X^k \in K[X]$. On désigne par $P(\sigma)$ l'endomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ défini par substitution de σ à X :
$$P(\sigma) = p_0 \operatorname{Id} + p_1\sigma + \cdots + p_r\sigma^r$$
On rappelle que, pour tout couple $(P, Q) \in K[X]^2$ on a :
$$(P+Q)(\sigma) = P(\sigma) + Q(\sigma) \quad \text{et} \quad (PQ)(\sigma) = P(\sigma) \circ Q(\sigma)\,.$$

- Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$, on appelle **annulateur** de u le sous-ensemble de $K[X]$, noté $\operatorname{Ann}(u)$, défini par :
$$\operatorname{Ann}(u) = \{P \in K[X] \ / \ P(\sigma)(u) = 0\}$$

- Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$ est dite **linéaire récurrente** s'il existe un entier $r \geqslant 0$ ainsi que des scalaires $q_0, q_1, \ldots, q_r$ tels que $q_0 \neq 0$ et :
$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ q_0 u_{n+r} + q_1 u_{n+r-1} + \cdots + q_{r-1}u_{n+1} + q_r u_n = 0$$

– Partie I : polynôme minimal d'une suite linéaire récurrente –

Dans cette partie E et F sont des K-espaces vectoriels non nuls.

1. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$, $P = \sum_{k=0}^{r} p_k X^k \in K[X]$. Calculer, pour $n \in \mathbf{N}$, $[P(\sigma)(u)]_n$.

2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$.

(a) Démontrer que la suite u est linéaire récurrente si et seulement si $\operatorname{Ann}(u) \neq \{0\}$.
(b) Démontrer que si u est linéaire récurrente, alors il existe un unique polynôme normalisé noté π_u tel que $\operatorname{Ann}(u) = \pi_u.K[X]$.

*Le polynôme π_u s'appelle le **polynôme minimal** de la suite u.*

3. Dans cette question on prend $E = K = \mathbf{R}$.

(a) Démontrer que la suite $(2^n + 3^n)$ est linéaire récurrente et donner son polynôme minimal.
(b) Démontrer que la suite $\left(n^2 2^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est linéaire récurrente et donner son polynôme minimal.
(c) Est-ce que la suite $(n!)_{n\in\mathbf{N}}$ est linéaire récurrente ?

4. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$, on note $T(u)$ la suite de F définie par :
$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ [T(u)]_n = T(u_n)$$
Démontrer que si u est linéaire récurrente, alors il en est de même de $T(u)$ et le polynôme $\pi_{T(u)}$ divise π_u.

5. On note $\mathcal{R}(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}(E)$ formé des suites linéaires récurrentes. $\mathcal{R}(E)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(E)$?

6. **Un exemple important :** dans cette question on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_p(K)$ ainsi que deux éléments non nuls V et W de K^p. On leur associe la suite scalaire $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = {}^tWA^nV$.

   (a) Démontrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est linéaire récurrente et que le polynôme minimal de cette suite est égal au polynôme minimal de la matrice A.
   Dans la suite ce polynôme minimal sera noté π_A.

   (b) Vérifier que les suites $\beta = (A^nV)_{n\in\mathbf{N}}$ et u sont linéaires récurrentes et que :
   $$\pi_u \mid \pi_\beta \quad \text{et} \quad \pi_\beta \mid \pi_A$$
   Dans la suite π_β sera noté $\pi_{A,V}$ et π_u sera noté $\pi_{W,A,V}$.

   (c) Donner un majorant du degré de $\pi_{W,A,V}$.

   (d) Que peut-on dire de $\pi_{W,A,V}$, $\pi_{A,V}$, π_A lorsque $\pi_{W,A,V}(A)$ est nul ?

Partie II : une caractérisation des suites linéaires récurrentes scalaires

Dans cette partie on cherche à caractériser les suites récurrentes à valeurs dans le corps K. On introduit à cette fin les notations suivantes : pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$ et pour tout entier $m \geqslant 0$, on note $H_m(u)$ la matrice de $\mathcal{M}_{m+1}(K)$ définie par $H_m(u) = [u_{i+j-2}]_{(i,j)\in[1,m+1]^2}$ et on désigne par $D_m(u)$ son déterminant (rappel : ce déterminant est de taille $m+1$).

1. On suppose ici que $K = \mathbf{R}$ et on choisit pour u la suite de Fibonacci définie par :
   $$u_0 = 0,\ u_1 = 1;\ \forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

   (a) Calculer $D_m(u)$ pour tout entier $m \geqslant 0$.

   (b) Quel est le polynôme minimal de la suite u ?

2. On suppose ici que $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$ est une suite linéaire récurrente de polynôme minimal
   $$\pi_u = X^s + q_1X^{s-1} + \cdots + q_{s-1}X + q_s$$
   Démontrer que pour tout entier $m \geqslant s,\ D_m(u) = 0$.

3. Réciproquement soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$ pour laquelle il existe un entier $s \geqslant 1$ vérifiant :
   $$D_{s-1}(u) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall\, m \geqslant s,\ D_m(u) = 0$$
   On se propose de démontrer que u est linéaire récurrente et de donner une méthode de calcul de son polynôme minimal.

   (a) Quel est le rang de la matrice $H_s(u)$?

   (b) Démontrer qu'il existe un unique s-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_s) \in K^s$ tel que :
   $$H_s(u). \begin{bmatrix} q_s \\ q_{s-1} \\ \vdots \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) On pose, pour tout entier $m \geqslant s$:

$$\lambda_m = u_m + q_1 u_{m-1} + \cdots + q_{s-1} u_{m-s+1} + q_s u_{m-s}$$

Que vaut λ_m lorsque m appartient à l'intervalle $[s, 2s]$?

(d) Démontrer que :

$$D_{s+1}(u) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{s-1} & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_s & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{s-1} & u_s & \cdots & u_{2s-2} & 0 & 0 \\ u_s & u_{s+1} & \cdots & u_{2s-1} & 0 & \lambda_{2s+1} \\ u_{s+1} & u_{s+2} & \cdots & u_{2s} & \lambda_{2s+1} & \lambda_{2s+2} \end{vmatrix}$$

En déduire que $\lambda_{2s+1} = 0$.

(e) Plus généralement, soit $m \geqslant s+1$ pour lequel

$$\lambda_s = \lambda_{s+1} = \cdots = \lambda_{2s} = \cdots = \lambda_{m+s-1} = 0$$

Démontrer que :

$$D_m(u) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{s-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{s-1} & \cdots & \cdots & u_{2s-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_s & \cdots & \cdots & u_{2s-1} & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{m+s} \\ \vdots & & & \vdots & 0 & & \iddots & * \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \lambda_{m+s} & & \vdots \\ u_m & \cdots & \cdots & u_{m+s-1} & \lambda_{m+s} & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

(On détaillera les opérations effectuées ainsi que l'ordre dans lequel elles sont faites).

(f) Conclure que la suite u est linéaire récurrente de polynôme minimal

$$\pi_u = X^s + q_1 X^{s-1} + \cdots + q_{s-1} X + q_s$$

– Partie III : polynômes minimaux en algèbre linéaire –

Pour tout polynôme $P \in K[X]$, on note $\operatorname{coeff}(P, k)$ le coefficient d'indice k de P.

1. Soit $F \in K[X]$ un polynôme normalisé, de degré $m \geqslant 1$. On lui associe l'application

$$\Phi : K[X] \times K[X] \to K,\ (P, Q) \mapsto \operatorname{coeff}(PQ \bmod F, m-1)$$

(a) Vérifier que Φ est bilinéaire et symétrique.

(b) Soit $P \in K[X]$ tel que pour tout $Q \in K[X]$, $\Phi(P, Q) = 0$. Démontrer que F divise P. Étudier la réciproque.
Indication : on pourra introduire $r = d^\circ(P \bmod F)$.

(c) Soit Φ_{m-1} la restriction de Φ à $K_{m-1}[X] \times K_{m-1}[X]$. Φ_{m-1} est-elle dégénérée ?

(d) Soit $G \in K_{m-1}[X]$. On considère la suite $u = (u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ définie par $u_k = \Phi\left(X^k, G\right)$.
i) Démontrer qu'un polynôme P appartient à $\operatorname{Ann}(u)$ si et seulement si pour tout entier i on a $\Phi\left(PG, X^i\right) = 0$.
ii) En déduire que u est linéaire récurrente et que son polynôme minimal est donné

par :

$$\pi_u = \frac{F}{F \wedge G}$$

Dans la suite du problème on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ainsi qu'un vecteur $V \in K^n$ non nul. On utilise les notations des questions précédentes en prenant $F = \pi_{A,V}$, de degré m.

2. Soit E le sous-espace de K^n engendré par $\left\{A^k V,\ k \in \mathbf{N}\right\}$. Démontrer que l'application

$$\Theta : K_{m-1}[X] \to E,\ P \mapsto P(A).V$$

est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.

3. Soit $\rho : K^n \to E^*$ l'application qui, à $W \in K^n$ associe la forme linéaire

$$\rho(W) : E \to K,\ z \mapsto {}^tW.z\ .$$

Montrer que ρ est linéaire et surjective.

4. Soit $\varphi : K_{m-1}[X] \to K_{m-1}[X]^*$ l'application définie par :

$$\forall\ (P,Q) \in K_{m-1}[X] \times K_{m-1}[X],\ \varphi(P)(Q) = \Phi\,(P,Q)$$

Expliquer pourquoi φ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.

5. On note $\Gamma = \varphi^{-1} \circ {}^t\Theta \circ \rho$.

(a) Que peut-on dire de Γ ?

(b) Démontrer que pour tout $P \in K_{m-1}[X]$ et pour tout $W \in K^n$:

$$\Phi\,(\Gamma(W), P) = {}^tW.P(A).V$$

(c) Vérifier que cette relation est vraie pour tout polynôme P de $K[X]$.

(d) Conclure que pour tout $W \in K^n$:

$$\pi_{W,A,V} = \frac{\pi_{A,V}}{\pi_{A,V} \wedge \Gamma(W)}$$

(e) En déduire qu'il existe au moins un vecteur W de K^n pour lequel $\pi_{W,A,V} = \pi_{A,V}$.

Dans la fin de cette partie on cherche dans quelle mesure on peut « espérer » que $\pi_{W,A,V}$ soit égal à $\pi_{A,V}$.

Notations : on rappelle qu'un polynôme $P = P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ à n indéterminées est un élément de l'algèbre $K\,[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ qui peut se définir comme $(K[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}])[X_n]$ pour $n > 1$. On peut noter P ainsi :

$$P = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}\ .$$

Pour un tel polynôme, chacun de ses **monômes** $a_{i_1,\ldots,i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$ a pour degré total $i_1 + \cdots + i_n$, et le **degré total** de P est le plus grand des degrés totaux de ses monômes non nuls.

6. Soient $R \in K\,[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ un polynôme **non nul** de degré total d, à n indéterminées et S un sous-ensemble fini non vide de K. Montrer que l'ensemble

$$\Omega_S = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S^n\ /\ R\,(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0\}$$

possède au plus $d.\,[\mathrm{Card}\, S]^{n-1}$ éléments.

Indication : on pourra procéder par récurrence sur n.

7. On admet le résultat suivant : étant donnés deux polynômes non nuls

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \quad B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \in K[X]$$

avec $b_m \neq 0$, ces polynômes sont premiers entre eux si et seulement si le déterminant ci-dessous n'est pas nul :

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & \vdots & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & b_m & \vdots & \ddots & 0 \\ a_n & \vdots & & a_1 & 0 & b_m & & b_0 \\ 0 & a_n & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{vmatrix} \\ \xleftarrow{\hspace{2em}} m \xrightarrow{\hspace{2em}}\xleftarrow{\hspace{2em}} n \xrightarrow{\hspace{2em}}\end{array}$$

Ce déterminant s'appelle le **résultant** de (A, B). On le notera $\operatorname{Res}(A, B)$.

On considère comme dans la question **6** un sous-ensemble S de K qui est fini et admet au moins m éléments.

(a) Démontrer que l'ensemble :

$$\left\{W = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in S^n \ / \ \pi_{A,V} \wedge \Gamma(W) = 1\right\}$$

possède au moins $[\operatorname{Card} S]^n - m. [\operatorname{Card} S]^{n-1}$ éléments.

(b) On choisit au hasard (de manière équiprobable) un n-uplet W dans S^n. Déduire de ce qui précède un minorant de la probabilité pour que $\pi_{W,A,V} = \pi_{A,V}$.

– Partie IV : l'algorithme de Berlekamp-Massey –

Le but de cette partie est de fournir un algorithme efficace dans la recherche du polynôme minimal d'une suite linéaire récurrente scalaire lorsqu'on connait à l'avance une majoration du degré de ce polynôme. La méthode proposée est indépendante des parties II et III.

Dans cette partie A et B sont deux polynômes de $K[X]$ pour lesquels $d^\circ A = m$, $d^\circ B = n$, avec $m \geqslant n \geqslant 1$. On rappelle que l'algorithme d'Euclide fournit par divisions euclidiennes successives deux familles finies $(Q_i)_{i \in [1,l]}$ et $(R_i)_{i \in [0,l+1]}$ de $K[X]$ vérifiant :

$$\begin{cases} R_0 &= A,\ R_1 = B \\ R_{i-1} &= Q_i R_i + R_{i+1} \quad \text{pour } i \in [1, l] \quad \text{avec} \quad \forall\, i \in [1, l[,\ 0 \leqslant d^\circ R_{i+1} < d^\circ R_i \\ R_l &= A \wedge B,\ \ R_{l+1} = 0 \end{cases}$$

On considère les deux familles finies de polynômes $(S_i)_{i \in [0,l+1]}$ et $(T_i)_{i \in [0,l+1]}$ définies par :

$$S_0 = 1,\ S_1 = 0,\ T_0 = 0,\ T_1 = 1 \quad \text{et pour} \quad i \in [1, l]\,, \ \begin{cases} S_{i+1} = S_{i-1} - Q_i S_i \\ T_{i+1} = T_{i-1} - Q_i T_i \end{cases}$$

1. Démontrer les propriétés suivantes :

(a) Pour tout $i \in [0, l+1]$, $S_i A + T_i B = R_i$.

(b) Pour tout $i \in [0, l]$, $S_{i+1} T_i - S_i T_{i+1} = (-1)^{i+1}$. En déduire la valeur de $S_i \wedge T_i$, pour $i \in [0, l+1]$.

(c) Pour tout $i \in [0, l+1]$, $R_i \wedge T_i = A \wedge T_i$.

(d) $d^\circ T_1 \leqslant d^\circ T_2$, et pour tout $i \in [2, l]$, $d^\circ T_i < d^\circ T_{i+1}$.

(e) Pour tout $i \in [1, l+1]$, $d^\circ T_i = m - d^\circ R_{i-1}$.
On peut alors démontrer de même (mais cela n'est pas demandé) que pour tout $i \in [2, l+1]$, $d^\circ S_i = n - d^\circ R_{i-1}$.

2. On fixe ici un entier $k \in [0, m[$ et on s'intéresse aux deux problèmes suivants :
$(\mathcal{P}_1)$: trouver un couple $(R, T) \in K[X]^2$ vérifiant :
$$TB \equiv R \bmod A,\ T \wedge A = 1,\ d^\circ R < k,\ d^\circ T \leqslant m - k$$
$(\mathcal{P}_2)$: trouver un couple $(R, T) \in K[X]^2$ vérifiant :
$$TB \equiv R \bmod A,\ d^\circ R < k,\ d^\circ T \leqslant m - k$$
Soit $j \in [1, l+1]$ pour lequel $d^\circ R_j < k \leqslant d^\circ R_{j-1}$.

(a) Démontrer que le couple (R_j, T_j) est une solution de $(\mathcal{P}_2)$. À quelle condition est-il une solution de $(\mathcal{P}_1)$?

(b) Inversement, on suppose qu'il existe un couple (R, T) solution de $(\mathcal{P}_1)$. Démontrer que :
$$\begin{cases} R_j \wedge T_j = 1 \\ \text{il existe } P \in K[X] \setminus \{0\} \text{ tel que } R = PR_j,\ T = PT_j \\ P \wedge A = 1 \end{cases}$$
Indication : on pourra s'intéresser au polynôme $R_jT - RT_j$ puis à $S_jT - TS_j$.

3. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$. On lui associe la suite de polynômes $(B_r)_{r\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $B_r = \sum_{k=0}^{2r-1} u_k X^k$. On suppose qu'il existe deux polynômes $H = \sum_{k=0}^{s} q_k X^k$ et R vérifiant :
$$q_0 = 1,\ d^\circ R < s, \quad \text{et} \quad \forall\, r \geqslant s,\ HB_r \equiv R \bmod X^{2r}$$
Démontrer alors que u est linéaire récurrente et que $\sum_{k=0}^{s} q_{s-k} X^k \in \operatorname{Ann}(u)$.

4. Réciproquement, soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$ une suite linéaire récurrente non nulle dont $Q = \sum_{k=0}^{s} q_k X^{s-k}$ (avec $q_0 = 1$) est un polynôme annulateur.

(a) Dans ces conditions, démontrer que :
i) il existe un polynôme R de degré strictement inférieur à s tel que pour tout entier $r \geqslant s$:
$$Q^* B_r \equiv R \bmod X^{2r}, \quad \text{où} \quad Q^*(X) = X^s Q\Big(\frac{1}{X}\Big) = \sum_{k=0}^{s} q_k X^k$$
ii) Si $Q = \pi_u$, alors $s = \max(1 + d^\circ R,\ d^\circ Q^*)$ et $Q^* \wedge R = 1$.

(b) On reprend les notations de la question **1** avec $A = X^{2r}$, $B = B_r$, pour $r \geqslant s$; on choisit $k = r$ et on considère un entier $j \in [1, l+1]$ tel que $d^\circ R_j < r \leqslant d^\circ R_{j-1}$.
i) Vérifier que
$$T_j B_r \equiv R_j \bmod X^{2r},\ R_j \wedge T_j = T_j \wedge X^{2r} = 1,\ d^\circ T_j \leqslant r,\ d^\circ R_j < r$$
ii) En déduire qu'il existe $P \in K[X] - \{0\}$ tel que :
$$\pi_u^* = PT_j,\ R = PR_j \quad \text{et} \quad P \wedge X^{2r} = 1$$
iii) Conclure que, quitte à multiplier T_j, R_j par un élément non nul de K, on peut supposer que $T_j(0) = 1$ et que le polynôme minimal π_u est alors donné par :
$$\pi_u(X) = X^s T_j\Big(\frac{1}{X}\Big) \quad \text{où} \quad s = \max(1 + d^\circ R_j,\ d^\circ T_j)$$

4.2 Commentaires sur la première épreuve écrite

Le sujet portait sur les suites récurrentes linéaires, vues sous l'angle des polynômes en l'endomorphisme de décalage sur les suites. Il était partiellement inspiré de l'ouvrage suivant :
J. von zur Gathen, J. Gerhard, *Modern computer algebra, 2^d edition*, Cambrige University Press (2003) .
La première partie mettait en place ce point de vue polynomial ; la deuxième adoptait un point de vue matriciel, la troisième explorait un exemple important de suite récurrente qui utilise de l'algèbre bilinéaire et enfin la dernière partie proposait l'étude d'un algorithme de recherche du polynôme minimal d'une suite linéaire récurrente.
Ce sujet a dérouté de nombreux candidats qui tendaient à mélanger les objets : suites, terme d'ordre n d'une suite, endomorphismes, vecteurs, polynômes et polynôme d'un endomorphisme ou d'une matrice. Pour les admissibles, le sujet a donné des résultats convenables avec des copies assez bien rédigées en général.
Les candidats pouvaient obtenir un bon résultat en abordant intégralement et soigneusement la plupart des questions de la partie I et certaines de la partie II, alors qu'un grappillage de questions éparses n'apportait qu'un résultat décevant ; les cinquante meilleures copies traitent sans erreur les deux premières parties ainsi qu'un bonne part de la partie III.

Partie 1

Cette partie est en général bien traitée.
Les questions 1˚ et 2˚a), sans difficulté, ont en général été bien traitées par les candidats. Certains emploient de mauvaises notations et un mauvais formalisme mathématique ce qui est préoccupant de la part d'enseignants.
Pour la question 2˚b), il était gênant de ne pas connaître la définition d'un idéal. Redémontrer que $K[X]$ est principal était évidemment une perte de temps.
Dans la question 3˚), la recherche d'un polynôme annulateur est en général correctement effectuée, plus rare est la démonstration du fait que le polynôme trouvé est bien le polynôme minimal. En 3˚a), peu de candidats réinvestissent leurs connaissances sur les suites récurrentes linéaires doubles ; il est vrai que l'on a plus l'habitude de raisonner dans l'autre sens : à partir de la relation de récurrence trouver l'expression de la suite. En 3˚b), le fait que 2 est racine triple de l'équation caractéristique n'a quasiment pas été reconnu. Enfin, en 3˚c), bon nombre de candidats avaient une idée intuitive, sans réussir à mettre en place une démonstration correcte qui nécessitait un raisonnement par l'absurde.
La question 4˚) a en général été bien traitée sauf par ceux qui confondaient la composition et le produit pour les polynômes d'endomorphismes, ce qui amenait inévitablement des écritures absurdes.
Pour la question 5˚), ouverte et très discriminante, trop peu de candidats ont eu l'intuition de la réponse et encore moins nombreux sont ceux qui ont su démontrer leur affirmation. De nombreux résultats faux ont été proposés. Signalons que l'ingrédient clé $(PQ)(\sigma) = P(\sigma) \circ Q(\sigma)$ était rappelé au début de l'énoncé.
La question 6˚a) est souvent mal traitée voire mal comprise, certains candidats ayant assimilé sans justification la notion de polynôme annulateur d'une matrice A et celle de polynôme annulateur de la suite $(A^n)_{n\in\mathbf{N}}$. Le théorème de Cayley-Hamilton, parfois appelé à la rescousse, ne permettait pas de bien comprendre ce vers quoi l'on se dirigeait.

La question 6˚b) est mieux traitée mais rares sont ceux qui pensent à utiliser la question 4.

Partie 2

Cette partie a été la plus abordée et globalement la mieux réussie.
La question 1˚a) est en général bien traitée, quelques-uns oublient cependant de traiter les cas $m = 0$ et $m = 1$.
Pour la question 1˚b), il est souvent oublié de dire que le polynôme annulateur trouvé ($X^2 + X + 1$) est bien minimal.
La question 2˚ est traitée de manière parfois imprécise.
La question 3˚ a donné lieu à une erreur de lecture, certains candidats pensant que l'hypothèse faite à la question précédente restait valable.
Dans la question 3˚a) les candidats oublient parfois que H_s est une matrice de $\mathcal{M}_{s+1}(K)$ et justifient rarement le rang annonce.
Pour la question 3b), généralement mal traitée, rares sont ceux qui remarquent que la dernière coordonnée du $(s + 1)$-uple est non nulle du fait de l'inversibilité de $H_s(u)$. Certains candidats ont judicieusement pensé à examiner les relations de liaison sur les colonnes, plutôt que d'appliquer le théorème du rang.
Les questions 3˚c), 3˚d), et 3˚e) ont été souvent bâclées, avec peu d'explications concernant les opérations effectuées. Il a souvent été oublié de préciser l'ordre dans lequel on effectue les opérations sur les colonnes. Quelques bons candidats ont pensé à utiliser le développement d'un déterminant triangulaire par blocs.

Partie 3

Les très nombreuses notations de cette partie ont sans doute découragé beaucoup de candidats.
La question 1˚a) est peu traitée et on ne montre pas correctement la bilinéarité de Φ sans montrer que le reste est la somme des restes à l'aide des degrés. Personne n'a justifié la linéarité du reste modulo m, qui découle de l'unicité du reste dans la division euclidienne.
La question 1˚b) est souvent bien faite à part la réciproque pourtant beaucoup plus simple mais déroutante parce qu'ouverte. Peu de candidats connaissent la définition d'une forme non dégénérée. On trouve trop souvent des phrases comme « une application injective en dimension finie est bijective ».
Dans la question 2˚), si la surjectivité est souvent obtenue, nombreux sont les candidats à terminer la démonstration en avançant le fait que « on est en dimension finie », sans préciser que $\dim K_{m-1}[X] = \dim E$. L'étude de l'injectivité a souvent donné lieu à ceci : « Si $P(A)V = 0$, comme $V = 0$, alors $P(A) = 0\ldots$ »
Dans la question 3˚, pour montrer la surjectivité de ρ, il fallait d'abord prolonger une forme linéaire de E à K^n tout entier, ce qui n' a pas été vu.
Les questions 5˚, 6˚ et 7˚ n'ont quasiment pas été abordées.

Partie 4

La récurrence demandée en 1˚a) était trop souvent fausse : initialisation incomplète ou hypothèse de récurrence insuffisante (il fallait mettre en place une récurrence « double » ou « forte »).

Les questions 1˚b) et c) ont été bien réussies par les candidats les ayant abordées. Au-delà de la question 2˚a) quasiment rien n'a été abordé.

4.3 Énoncé de la seconde épreuve écrite

– NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES –

La lettre $\mathbf{C}$ désigne le corps des nombres complexes ; les espaces vectoriels considérés seront toujours des espaces vectoriels sur ce corps $\mathbf{C}$, et les symboles $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ ont leur signification habituelle. On note $\mathbf{N}^*$ (resp. $\mathbf{C}^*$) l'ensemble des entiers $\geqslant 1$ (resp. l'ensemble des complexes non-nuls).
La lettre $\mathscr{P}$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes (« polynômes » et « fonctions polynômes » seront toujours confondus, puisqu'on travaille sur le corps $\mathbf{C}$, infini).
La partie réelle (resp. la partie imaginaire) du nombre complexe z sera notée $\Re(z)$ (resp. $\Im(z)$) en un endroit du problème.
On rappelle que le symbole de Kronecker δ_{ij} vaut 1 et $i = j$ et 0 sinon (i et j étant deux entiers).
Enfin, pour une partie A d'un espace vectoriel normé $\mathscr{E}$ on note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A.

L'objectif du problème est l'étude de l'équation de Guichard :

$$(G) \quad f(z+1) - f(z) = g(z)$$

dans un certain espace $\mathscr{E}$ de fonctions définies sur $\mathbf{C}$, qui contient $\mathscr{P}$. Dans cette équation, $g \in \mathscr{E}$ est la donnée, $f \in \mathscr{E}$ l'inconnue.
La partie I étudie l'équation (G) sur $\mathscr{P}$, et donne une application.
La partie II définit l'espace $\mathscr{E}$ et établit quelques-unes de ses propriétés qui seront utiles par la suite.
La partie III étudie l'équation (G) sur $\mathscr{E}$.
La partie IV, enfin, étudie une variante multiplicative de (G), à savoir l'équation (sur $\mathscr{E}$) :

$$(H) \quad f(qz) - f(z) = g(z)$$

dans laquelle q est un nombre complexe non nul ($q \in \mathbf{C}^*$). Cette partie fait intervenir des considérations « diophantiennes », en ce sens que la vitesse d'approximation d'un irrationnel par des rationnels doit être prise en compte.

– Partie I : L'équation (G) sur $\mathscr{P}$ et les opérateurs nilpotents –

Soit $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ l'opérateur de différence première défini par :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad (\Delta P)(z) = P(z+1) - P(z), \text{ où } \Delta P = \Delta(P) \tag{1}$$

1. **(a)** Démontrer que $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est une application linéaire *localement nilpotente*, c'est-à-dire $\Big($en notant $\Delta^n = \Delta \circ \ldots \circ \Delta$ (n fois) et $\Delta^0 = \mathrm{id}\Big)$:

$$\forall\ P \in \mathscr{P},\ \exists\ n \in \mathbf{N} \ \text{ tel que } \Delta^n P = 0\ .$$

(b) Existe-t-il un entier $p \in \mathbf{N}$ tel que $\Delta^p = 0$?

2. Démontrer que $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ n'est pas injective et décrire son noyau.

3. On définit la suite $(H_n)_{n\geqslant 0}$ des *polynômes de Hilbert* sur $\mathbf{C}$ par :

$$H_0(z)=1;\ \forall n\in\mathbf{N}^*,\ H_n(z)=\frac{z(z-1)\dots(z-n+1)}{n!}\ .$$

(a) Démontrer que $\Delta H_0=0$, $\Delta H_n=H_{n-1}$ si $n\geqslant 1$, et $\left(\Delta^k H_n\right)(0)=\delta_{n,k}$.

(b) Démontrer que $(H_n)_{n\geqslant 0}$ est une base de $\mathscr{P}$ et que, plus précisément :

$$\forall P\in\mathscr{P},\ P=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\Delta^n P\right)(0)H_n \tag{2}$$

Expliciter les coefficients du polynôme $z\to z^3$ sur la base (H_n).

(c) Démontrer que $\Delta:\mathscr{P}\to\mathscr{P}$ est surjective. Comment conciliez-vous cela avec la question 2) ?

4. **(a)** Soit p un entier fixé ; on écrit $z^p=f(z+1)-f(z)$, avec $f\in\mathscr{P}$ et $f(0)=0$. Démontrer que

$$\forall N\in\mathbf{N},\quad \sum_{n=0}^{N}n^p=f(N+1) \tag{3}$$

(b) Donner une formule simple pour calculer $\sum_{n=0}^{N}n^3$ en fonction de N.

5. **(a)** Pour $P\in\mathscr{P}$, on pose $\|P\|=\sup_{x\in[0,1]}|P(x)|$. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathscr{P}$.

(b) L'application linéaire $\Delta:\mathscr{P}\to\mathscr{P}$ est-elle continue pour la norme précédente ?

(c) Montrer qu'il existe une norme sur $\mathscr{P}$ pour laquelle Δ est continue.
Indication : on pourra utiliser le caractère localement nilpotent de Δ pour définir à partir de la formule (2) une norme faisant de Δ une application linéaire de norme 1.

6. On rappelle le *lemme de Baire pour les espaces vectoriels normés complets ou « espaces de Banach »* (admis ici) : Si $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fermés d'un espace de Banach dont la réunion est tout l'espace, alors l'un au moins de ces fermés, F_p, est d'intérieur non-vide ($\overset{\circ}{F}_p\neq\emptyset$). On se donne X un tel espace de Banach (ici sur $\mathbf{C}$).

(a) Soit Y un sous-espace vectoriel de X ; montrer que $\overset{\circ}{Y}\neq\emptyset\Longrightarrow Y=X$.

(b) Soit $T:X\to X$ une application linéaire continue *localement nilpotente* :

$$\forall x\in X,\ \exists n\in\mathbf{N}:T^n(x)=0\ .$$

Démontrer que T est nilpotente : il existe $n\in\mathbf{N}$ tel que $T^n=0$.

7. **(a)** L'espace vectoriel $\mathscr{P}$ est-il complet pour la norme construite au **5)c)** ?

(b) L'espace vectoriel $\mathscr{P}$ est-il complet pour au moins une norme ?

– Partie II : L'espace $\mathscr{E}$ des fonctions entières –

Soit $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des fonctions entières, c'est-à-dire des fonctions $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ qui s'écrivent

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

où la série entière figurant au second membre a un rayon de convergence infini. On a immédiatement $\mathscr{P}\subset\mathscr{E}$.

1. **(a)** Démontrer que les a_n sont déterminés de façon unique par f et que l'on a plus précisément :

$$\forall r > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}, \qquad a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t\ . \tag{4}$$

(b) On pose $M(f,r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Démontrer que :

$$\forall r > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad |a_n| \leqslant \frac{M(f,r)}{r^n}\ . \tag{5}$$

(c) Démontrer que $\mathscr{P}$ n'est pas égal à $\mathscr{E}$ (il suffira de donner un exemple d'une fonction $f \in \mathscr{E},\ f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, qui n'est pas un polynôme ; on justifiera la réponse).

(d) Démontrer que les seules fonctions de $\mathscr{E}$ qui sont bornées sont les constantes.

(e) Démontrer que

$$f \in \mathscr{P} \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge uniformément sur } \mathbf{C} \text{ tout entier.}$$

2. Cette question a pour but de mettre en place quelques propriétés importantes de l'espace $\mathscr{E}$.

(a) Soit (f_k) une suite de fonctions de $\mathscr{E}$, $f_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} z^n$. On suppose que (f_k) converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{C}$. Démontrer que f appartient à $\mathscr{E}$.

Indication : on pourra commencer par démontrer que :

$$\forall R > 0,\ \exists M > 0 \quad / \quad \forall (n,k) \in \mathbf{N}^2,\ |a_n^{(k)}| \leqslant \frac{M}{R^n}\ .$$

(b) Démontrer qu'une fonction f de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement s'il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{C}$.

(c) Démontrer que $\mathscr{E}$ est stable par produit, c'est-à-dire que $f, g \in \mathscr{E} \Longrightarrow fg \in \mathscr{E}$.

(d) Soit $f \in \mathscr{E},\ a \in \mathbf{C}$ et $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $g(z) = f(z+a)$. Montrer que $g \in \mathscr{E}$. Ainsi, $\mathscr{E}$ est stable par translation.

3. Une suite $(\lambda_n)_{n \geqslant 0}$ de complexes est dite un *multiplicateur* de $\mathscr{E}$ si, pour toute fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{E}\ ,$$

la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n z^n$ définit un élément de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire a un rayon de convergence infini. On se propose de montrer qu'on a équivalence entre :

i) (λ_n) est un multiplicateur de $\mathscr{E}$;

ii) il existe des constantes $A, B > 0$ telles que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad |\lambda_n| \leqslant AB^n$.

(a) Démontrer que i) implique ii).

(b) On suppose que ii) n'est pas réalisée. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(n_j)_{j \geqslant 1}$ d'entiers $\geqslant 1$ avec : $\forall j \geqslant 1,\ |\lambda_{n_j}| > j^{n_j}$. Puis montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathscr{E}$, de la forme $f(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{n_j} z^{n_j}$, telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{n_j} \lambda_{n_j} z^{n_j}$ ne soit pas infini. En déduire que ii) implique i).

4. **(a)** Démontrer que Δ, défini par $(\Delta f)(z) = f(z+1) - f(z)$, envoie $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$.

(b) Décrire le noyau $\ker \Delta$ de $\Delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, et montrer que ce noyau est de dimension infinie. Ainsi, $\Delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est très loin d'être injective. On verra dans la partie III qu'elle est cependant surjective.

5. On rappelle que pour $\rho > 0$ et f définie et continue sur le cercle de centre 0 et de rayon ρ ($|w| = \rho$), à valeurs complexes, l'intégrale curviligne

$$I = \int_{|w|=\rho} f(w)\, \mathrm{d}w$$

est par définition :

$$I = \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) i\rho e^{it}\, \mathrm{d}t\ . \tag{6}$$

(a) Démontrer que $|I| \leqslant 2\pi\rho\, M(f,\rho)$.

(b) Montrer que si f appartient à $\mathscr{E}$ alors $I = 0$.

(c) Soit un élément h de $\mathscr{E}$ et un entier $k \in \mathbf{Z}$. On pose :

$$J_k(h,\rho) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} w^k h(w)\, \mathrm{d}w\ .$$

Démontrer que $J_{-1}(h,\rho) = h(0)$ et $J_k(h,\rho) = 0$ pour tout $k \geqslant 0$.

6. **(a)** Montrer qu'il existe une fonction g de $\mathscr{E}$ telle que

$$w \in \mathbf{C} \Longrightarrow e^w = 1 + w + w^2 g(w) \quad \text{avec de plus} \quad |g(w)| \leqslant e - 2 \quad \text{si} \quad |w| = 1\ .$$

(b) Soit $k \in \mathbf{Z}$, et

$$I_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{w^k}{e^w - 1}\, \mathrm{d}w\ .$$

i) Démontrer que I_k est bien définie.

ii) Démontrer que $I_0 = 1$ et que $I_k = 0$ si $k \geqslant 1$.

Indication : on pourra par exemple faire intervenir une série géométrique.

– Partie III : L'équation de Guichard dans $\mathscr{E}$ –

A) Les polynômes de Bernoulli et une application :

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C}$, on pose :

$$B_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{e^{zw}}{(e^w - 1)} \frac{\mathrm{d}w}{w^n}\ . \tag{7}$$

1. Démontrer que

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_{k-n}}{k!} z^k$$

puis que B_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Calculer B_0.

2. **(a)** Démontrer que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ B_n'(x) = nB_{n-1}(x)\ . \tag{8}$$

(b) Démontrer que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1}\ , \tag{9}$$

et que $B_n(1) = B_n(0)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

3. **(a)** Démontrer que

$$\forall n \geqslant 1,\ \int_0^1 B_n(x)\, \mathrm{d}x = 0\ . \tag{10}$$

(b) Calculer B_1, B_2, B_3.

Les deux questions suivantes proposent une application (à l'ordre 2) des polynômes B_n.

4. Soit $h : [0,1] \to \mathbf{C}$, de classe $\mathscr{C}^2$.

(a) Démontrer que
$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{h(0)+h(1)}{2} - \int_0^1 h'(t)B_1(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

(b) Montrer ensuite que
$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{h(0)+h(1)}{2} + \frac{h'(0)-h'(1)}{12} + \frac{1}{2}\int_0^1 h''(t)B_2(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

5. Soit $\varphi : [1,\infty[\to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^1, et N un entier non nul. On pose :
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n) \quad \text{et } I_N = \int_1^N \varphi(t)\,\mathrm{d}t\ .$$
On désigne par π_2 la fonction 1-périodique valant $\dfrac{B_2}{2}$ sur $[0,1[$.

(a) Montrer qu'on a, pour $n \in \mathbf{N}^*$:
$$\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\varphi(n)+\varphi(n+1)}{2} + \frac{\varphi'(n)-\varphi'(n+1)}{12} + \int_n^{n+1} \varphi''(t)\pi_2(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

(b) Démontrer que
$$S_N = I_N + \frac{1}{2}\Big(\varphi(1)+\varphi(N)\Big) + \frac{1}{12}\Big(\varphi'(N)-\varphi'(1)\Big) - \int_1^N \varphi''(t)\pi_2(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

(c) On suppose que $|\varphi''|$ est intégrable sur $[1,\infty[$ et que $\varphi(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \varphi(n)$ et l'intégrale généralisée (impropre) $\int_1^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

(d) Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$?

B) Solution de l'équation (G) de Guichard

1. **(Question préliminaire) :** Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $g \in \mathscr{E}$. On veut résoudre l'équation $\Delta f = g$, avec $f \in \mathscr{E}$. Pourquoi est-il plausible de prendre
$$f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{B_{n+1}}{n+1}\ ?$$
Qu'est-ce qui pourrait empêcher ce choix ?

La suite de cette partie est consacrée à une modification des polynômes de Bernoulli destinée à contourner cet obstacle.

2. On se propose d'abord de montrer par l'absurde le fait suivant :
$$\text{Il existe } c > 0 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbf{N},\ |w| = (2n+1)\pi \Longrightarrow |e^w - 1| \geqslant c\ . \tag{11}$$
On suppose donc qu'une telle constante c n'existe pas.

i) Montrer qu'on peut trouver des suites $(n_j)_{j\geqslant 1}$ d'entiers positifs et $(w_j)_{j\geqslant 1}$ de complexes telles que $|w_j| = (2n_j+1)\pi$ et $\lim_{j\to\infty} e^{w_j} = 1$.

ii) Démontrer que l'on a : $\lim_{j\to\infty} \Re(w_j) = 0$ et $\lim_{j\to\infty} \Big(|\Im(w_j)| - (2n_j+1)\pi\Big) = 0$.

iii) Montrer qu'il existe une suite (ε_j), à valeurs dans $\{+1,-1\}$ et telle que la quantité $\delta_j = w_j - i\varepsilon_j(2n_j+1)\pi$ tende vers 0 quand j tend vers $+\infty$.
iv) Conclure que (11) est vrai.

Dans ce qui suit, on pose, pour $n \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C}$:

$$\rho_n = (2n+1)\pi;\ A_n(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{|w|=\rho_n} \frac{e^{zw}}{(e^w-1)}\frac{\mathrm{d}w}{w^n}\ . \tag{12}$$

3. Démontrer que A_n est dans $\mathscr{E}$, et que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in \mathbf{C},\quad (\Delta A_n)(z) = nz^{n-1}\ .$$

4. Montrer qu'il existe des constantes a et b strictement positives telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in \mathbf{C},\ |A_n(z)| \leqslant ae^{nb|z|}\ . \tag{13}$$

5. Soit $g \in \mathscr{E}$. Démontrer que l'équation de Guichard (G) : $f(z+1)-f(z) = g(z)$ possède au moins une solution dans $\mathscr{E}$. Décrire toutes les solutions de (G).

– Partie IV : La version multiplicative (H) de l'équation de Guichard –

Soit $q \in \mathbf{C}^*$. On considère dans cette partie l'équation « aux q-différences »

$$(H)\quad f(qz) - f(z) = g(z),\quad \text{avec } g \in \mathscr{E}\ .$$

1. On suppose $|q| \neq 1$. Démontrer que (H) possède une solution $f \in \mathscr{E}$ si et seulement si $g(0) = 0$. Décrire alors l'ensemble de toutes les solutions.

Dans la suite, on suppose $|q| = 1$ et plus précisément $q = e^{2i\pi\theta}$, où $\theta \notin \mathbf{Q}$.

2. **(Question préliminaire) :** Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus proche :

$$\|x\| = d(x,\mathbf{Z}) = \inf_{m\in\mathbf{Z}} |x-m| = \min_{m\in\mathbf{Z}} |x-m|\ .$$

Démontrer que $\|x\| \leqslant \dfrac{1}{2}$, et qu'on a la double inégalité :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad 4\|x\| \leqslant |e^{2i\pi x}-1| \leqslant 2\pi\|x\|\ .$$

Indication : on rappelle que $0 \leqslant u \leqslant \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin u \geqslant \dfrac{2}{\pi}u$.

3. On dit que θ est *lentement approchable* (par des rationnels) s'il existe $a > 0$ et $b > 1$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \|n\theta\| \geqslant ab^{-n}\ . \tag{14}$$

On dit que θ est *vite approchable* si $\theta \notin \mathbf{Q}$ et si θ n'est pas lentement approchable. On note A l'ensemble des irrationnels lentement approchables, et B l'ensemble des irrationnels vite approchables.

(a) Démontrer que $\sqrt{2} \in A$.

(b) Montrer qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs $(p_k)_{k\geqslant 1}$ telle que l'on ait :

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_k}} \in B\ .$$

Indication : on pourra définir les p_k de proche en proche afin d'avoir une croissance suffisamment rapide.

4. Soit θ un irrationnel, et $q = e^{2i\pi\theta}$.

(a) Montrer la double inégalité :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 4\|n\theta\| \leqslant |q^n - 1| \leqslant 2\pi\|n\theta\| \ .$$

(b) Montrer qu'on a équivalence entre :

i) θ est *lentement approchable*, autrement dit $\theta \in A$;

ii) pour toute $g \in \mathscr{E}$ avec $g(0) = 0$, l'équation (H) possède une solution $f \in \mathscr{E}$.

Indication : on pourra utiliser la question **3)** de la partie **II** sur les multiplicateurs de $\mathscr{E}$.

4.4 Commentaires sur la seconde épreuve écrite

Remarques générales

Le sujet d'analyse proposait quelques études sur une équation aux différences finies dite équation de Guichard, qui conduit traditionnellement aux polynômes de Bernoulli ; l'originalité du sujet résidait dans le traitement du cas des fonctions entières sans recourir aucunement à la théorie des fonctions holomorphes. Sur ce sujet on pourra consulter avec intérêt les ouvrages suivants :
A.O.Guelfond, *Calcul des différences finies,* Dunod 1963.
C.Berenstein-R.Gay, *Complex Analysis and special topics in harmonic analysis,* Springer, p. 408-409.
Les parties du problème les plus abordées sont bien entendu les parties I, II et III-A, le reste ayant été très peu abordé. On pouvait obtenir un bon résultat en traitant au moins intégralement la partie I ou la partie II.
Les correcteurs ont eu le plaisir de lire quelques bonnes voire très bonnes copies, reflétant une certaine expérience pédagogique, un recul marqué par rapport à la gestion du temps, à l'organisation au sein de la copie. Nous regrettons en revanche le fait que trop de candidats, pourtant déjà professeurs, n'apportent pas toute l'attention nécessaire aux détails de rédaction. Les conclusions par exemple sont trop souvent absentes, le candidat se contentant d'annoncer les justifications nécessaires (pour les meilleures copies) et laissant le soin au lecteur de les organiser pour conclure. Les rédactions trop superficielles qui admettent des résultats en prétendant les démontrer, ou recopient l'énoncé, ou abusent des locutions « clair », ou « évident », ou « trivial », etc. ne peuvent être acceptées comme valables.
Par ailleurs, les calculs ont souvent été menés de manière peu efficace voire interminable.
Beaucoup plus exceptionnellement, sont apparues des copies très mal présentées, mal ou pas numérotées ; ces copies ont été lues sans indulgence aucune.

Partie 1

Question 1˚) : Si la nilpotence locale de l'opérateur a été très majoritairement traitée avec le bon argument de décroissance du degré, la non nilpotence de l'opérateur exigeait de montrer que l'application de l'opérateur faisait chuter le degré d'exactement 1. Seul un tiers des candidats y parvient correctement tandis que les autres affirment que le degré de ΔP est $d^\circ P - 1$, montrant en réalité que $d^\circ(\Delta P) \leqslant d^\circ P - 1$. De nombreux candidats ont calculé explicitement

$\Delta^n(P)$ comme combinaison linéaire de $P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n)$ (ce qui n'était pas demandé) ; on pouvait alors facilement en déduire que $\Delta^n(P)$ était nul pour $n > d^\circ P$, mais cela n'a pas été vu en général.
Quelques curiosités : certains candidats pensent qu'il est indispensable de vérifier que $\Delta(0) = 0$ pour vérifier que Δ est linéaire ; et plusieurs résultats sont « déduits » par des tests sur des petites valeurs de l'entier n sans évoquer, ne serait-ce qu'une fois, le principe de récurrence.
Question 2°) : il est très souvent affirmé que le noyau de Δ est constitué des polynômes constants, mais la preuve n'est apportée que dans moins de la moitié des copies, sans compter les copies où le résultat est affirmé péremptoirement sans autre forme de justification. Rappelons que les mathématiques sont l'art de la démonstration ; par conséquent, tout résultat non explicitement au programme devrait être justifié (cette remarque peut être faite à de nombreuses autres reprises). Ici, le seul fait que les polynômes du noyau soient périodiques est insuffisant pour justifier qu'ils sont constants.
Question 3°) : cette question, essentiellement calculatoire, est bien et très souvent traitée. Le fait que les polynômes d'Hermite forment une base est très souvent justifié uniquement par l'échelonnement des degrés (ne justifiant que la liberté de la famille). Le calcul dans cette base des coordonnées de z^3 est le plus souvent correctement abordé. La surjectivité de l'opérateur n'a pas posé de problème majeur aux candidats qui s'en sortent plutôt bien.
Question 4°) : question très largement abordée et traitée. L'expression attendue de la somme des cubes devait être simplifiée. Il est regrettable que certains candidats aient préféré rendre une expression non simplifiée et non factorisée de cette somme. Certains candidats, connaissant d'avance la réponse, l'ont démontrée par récurrence et obtiennent ainsi les points de la question.
Question 5°) : question fort mal traitée. De nombreux candidats ignorent la définition exacte d'une norme et oublient soit de justifier l'existence de $\|P\|$ soit de vérifier l'un des trois axiomes fondamentaux ; les vérifications sont trop souvent formelles et ne présentent pas les arguments indispensables. Le passage à la borne supérieure pose souvent problème : pour prouver que la norme est bien définie, pour la démonstration de l'inégalité triangulaire ainsi que l'homogénéité qui doit être justifiée par la continuité de l'homothétie de rapport $|\lambda|$ (λ complexe). On attendait aussi un argument précis à propos du polynôme nul (caractérisé par une infinité de racines).
La non-continuité de l'opérateur pour la norme donnée (5°b) est bien traitée par un quart des copies environ. L'existence d'une norme telle que l'opérateur soit continu (5°c) a été peu traitée, mais elle est l'occasion pour de bons candidats de montrer leur savoir-faire et nous avons constaté avec bonheur des rédactions excellentes sur cette question. Quelques candidats pensent qu'il suffit de montrer que pour tout $P \in \mathcal{P}$, $||\Delta(P)|| \leqslant ||P||$ pour obtenir la norme 1 de Δ.
Question 6°) : ne présentait pas de difficulté mais rarement abordée. L'appel au Lemme de Baire qui était rappelé dans l'énoncé en a sans doute effrayé plus d'un alors que justement quelques candidats, dont la copie était par ailleurs moyenne, réussissent cette fin de partie brillamment. Certains connaissent la conséquence classique du théorème de Baire, selon laquelle un e.v.n. à base dénombrable ne saurait être complet.

Partie 2

Les candidats sont en général assez mal à l'aise pour faire la différence, dans cette partie, entre ce qu'ils sont censés savoir et ce qu'ils doivent redémontrer. En particulier, les permutations des

symboles « intégrale » et « limite » sont rarement justifiées correctement, sauf dans les bonnes copies ; on recommande donc aux candidats d'approfondir le cours d'analyse à ce sujet.
Question 1°) : Cette question n'a pas été bien traitée, les justifications étant rarement apportées correctement : il s'agissait pourtant d'une très classique interversion série/intégrale. Souvent, la convergence uniforme est évoquée mais pas vis-à-vis de la bonne variable, avec une confusion entre l'intervalle d'intégration et les disques du plan complexe (sans parler des fonctions entières qui prétendument « convergent uniformément sur **C** » !). Certains candidats ont tenté de traiter la question à l'aide de séries trigonométriques, ce qui était possible mais un peu plus délicat ; en effet, le coefficient de Fourier d'ordre n de $f_r : t \mapsto f(re^{it})$ dépend de r et n'a aucune raison (a priori) d'être de la forme $a_n r^n$.
L'inégalité qui suit n'a pas posé de problème aux candidats.
Dans 1°c), l'exemple choisi d'une fonction entière non polynomiale est le plus souvent l'exponentielle (parfois le sinus). Malheureusement, le caractère non polynomial n'est que rarement justifié alors que le rayon de convergence infini est la plupart du temps bien noté. Alors que certains candidats jugent évident le fait que l'exponentielle n'est pas un polynôme, d'autres au contraire pensent à apporter des arguments précis, dont la variété a séduit : absence de zéros de $\exp(z)$ sur $\mathbf{C}$, limite nulle quand x tend vers $-\infty$, exploitation de $(\exp)' = \exp$, qui montre qu'aucune dérivée n'est nulle, etc. La fonction $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, parfois proposée, ne brille pas particulièrement pour être une fonction entière.
Le théorème de Liouville (1°d) est très souvent bien démontré, au contraire de l'équivalence entre la convergence uniforme sur **C** tout entier de la série et le fait que la fonction soit polynomiale (1°e), souvent mal traitée, y compris pour le sens « facile ».
Question 2°) : le (a) n'a jamais été traité correctement. Dans 2°c), de nombreux candidats exploitent le produit de Cauchy des séries entières, ce qui est correct. Dans ce cas, il va de soi qu'il convient de parler du rayon de convergence de la série produit.
Pour les candidats introduisant des suites de polynômes, la convergence uniforme sur tout compact du produit a paru évidente, les rares tentatives de justification de la convergence uniforme du produit de deux suites uniformément convergentes échouant le plus souvent. En fait, un produit de suites uniformément convergentes ne converge pas toujours uniformément, comme le montre le contre-exemple suivant :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2^n} \end{array} \qquad \text{et} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément convergente vers 0 tandis que la suite $(f_n.f)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 mais pas uniformément. Par contre, si g est une fonction <u>bornée</u> alors $(f_n.g)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément. Bref, l'idée était bonne mais il fallait prendre garde aux détails. Bien entendu, l'énoncé avait été conçu pour permettre les deux approches…
Question 3°) : cette question a bien montré les difficultés rencontrées par les candidats pour prouver la convergence d'une série : tentatives de majoration du module des sommes partielles, fautes d'inégalités (avec parfois oubli de modules), ou croyance en une prétendue réciproque à la règle d'Alembert, selon laquelle a_{n+1}/a_n tendrait toujours en valeur absolue vers $\dfrac{1}{R}$ (R étant le rayon de convergence de la série)…
Dans les questions 5° et 6°, quelques candidats ont fait preuve d'une certaine maîtrise de la théorie des fonctions holomorphes, ce qui est encourageant. À la question 6°b), l'existence de l'intégrale est souvent mal comprise (on a parfois lu ceci : $w \neq 0 \Rightarrow e^w \neq 1$) et la permutation

de symboles fort mal faite, comme pour la preuve des formules de Cauchy. Là encore, les convergences uniforme et normale éventuelles ne concernent que rarement le bon domaine, quand elles sont évoquées.

Partie 3

Comme la précédente, cette partie a été traitée par beaucoup de candidats de manière formelle, sans aucune justification des calculs (y compris intégrations par parties et changements de variable).
La partie III-A est abordée par environ 40% des candidats. Les quatre premières questions ont été très souvent abordées, d'autant qu'il y avait certains points faciles à glaner.
La forme intégrale des polynômes de Bernoulli a posé quelques difficultés aux candidats. L'interversion série/intégrale ici non plus n'est pas assez souvent justifiée. Regrettons tout de même que certains aient cru nécessaire d'appliquer des théorèmes de dérivation compliqués pour dériver le polynôme B_n, tandis que d'autres dérivaient terme à terme B_n écrit comme somme de série sans indiquer que la somme était finie.
Les intégrations par parties de la question 4°) ont souvent donné aux candidats l'occasion de montrer qu'ils maitrisent bien ce théorème, et notamment les nécessaires hypothèses de régularité.
La question 5°) n'a pas été abordée correctement et, faute de temps, la partie III.B n'a quasiment jamais été abordée, sinon très superficiellement.

Partie 4

Cette partie a été très peu abordée.

Chapitre 5

Rapport sur les épreuves orales

5.1 Considérations générales

Le présent rapport complète le rapport de la session 2009. Les candidats sont invités à se reporter aux rapports des sessions antérieures pour une description complète du déroulement des épreuves orales.

Le jury est, cette année encore, satisfait de la prestation orale des candidats admissibles. Les candidats qui ont suivi une préparation universitaire ont manifestement eu plus d'aisance au cours des deux épreuves orales.

5.1.1 Déroulement des épreuves

Chacune des deux épreuves comporte un temps de préparation de trois heures. Les candidats reçoivent une convocation aux épreuves d'admission mentionnant l'heure du début de la préparation (se présenter un quart d'heure avant), ainsi que l'heure de passage devant la commission d'oral pour chacune des deux épreuves qui ont lieu en principe sur deux jours consécutifs y compris dimanches et jours fériés.

Le premier jour, le candidat choisit une enveloppe qui contient un choix de deux sujets. Ces deux sujets sont du même grand groupe, soit algèbre et géométrie, soit analyse et probabilités. Pendant la préparation, le candidat choisit le sujet qu'il va traiter.

Le deuxième jour, le candidat choisit une enveloppe contenant un choix de deux sujets de l'autre épreuve. Ces deux sujets sont du grand groupe que le candidat n'a pas tiré lors de sa première épreuve.

La moitié des candidats passent l'épreuve d'exposé (leçon) le premier jour et l'épreuve d'exemples et exercices le second jour, et pour l'autre moitié c'est l'inverse.

5.1.2 Préparation aux épreuves et documents

Pendant la préparation, tout document personnel est interdit. Seuls sont autorisés les livres et revues en vente libre dans le commerce. Les candidats peuvent utiliser les livres de la bibliothèque qui est mise à leur disposition, et dont l'inventaire figure en fin de ce rapport. Ils peuvent aussi utiliser leurs livres personnels à condition que ces livres ne soient pas annotés. Lors des trois heures de préparation, les candidats sont libres, à tout moment, de consulter ou d'emprunter des livres à la bibliothèque ou de prendre dans leurs bagages les livres qu'ils ont apportés.

Les calculatrices sont considérées comme des document personnels et sont, à ce titre, interdites. Cependant, selon le sujet traité, l'usage d'une calculatrice peut être autorisé par le président du jury, ou son représentant, à condition que le candidat justifie de son utilisation lors du passage devant la commission d'oral.

5.2 L'épreuve orale d'exposé

Cette épreuve comprend **trois parties d'égale durée** : le **plan**, le **développement**, puis les **questions** du jury. Avant de faire des commentaires spécifiques à chacune des phases de l'épreuve, commençons par des remarques d'ordre général.

- Il est conseillé de bien lire et comprendre le sujet.
- Il vaut mieux éviter de se disperser en cherchant dans un trop grand nombre d'ouvrages.
- La maitrise des résultats du programme de l'agrégation correspondant au sujet traité est évidemment indispensable.
- Si un candidat, pour une application ou une comparaison de méthodes, évoque d'autres résultats du programme, il est nécessaire qu'il les connaisse aussi.
- Le candidat doit faire tenir l'intégralité de son plan et de son développement sur le tableau.
- Les deux premières parties de l'épreuve (plan et exposé) se déroulent sans interruption.
- Les questions du jury portent en premier lieu sur ce qui vient d'être présenté.

5.2.1 Le choix des leçons

Comme les années précédentes, le jury a constaté une réticence de la part d'un bon nombre de candidats à choisir des leçons dans certains domaines particuliers (notamment la géométrie, les variables aléatoires, les algorithmes, etc.) ; on rappelle que les leçons portant sur les probabilités peuvent fournir de beaux développements et donner lieu à des exemples intéressants tant en analyse qu'en dénombrement et combinatoire.

Cette situation est regrettable car la préparation au concours interne de l'agrégation fournit l'occasion pour les professeurs de mettre à jour leurs connaissances dans des domaines qui ont une place importante dans les programmes actuels de l'enseignement secondaire. À ce propos, le jury rappelle que les professeurs agrégés sont susceptibles d'être appelés à enseigner dans l'enseignement supérieur (STS, CPGE, etc.).

5.2.2 Le plan

Il s'agit de faire un exposé structuré sur le sujet choisi en quinze minutes : définitions, énoncés clairs et précis, exemples, contre exemples, applications Cela peut ressembler à un cours magistral dans lequel on ne présente toutefois aucune démonstration et où le niveau de rédaction doit rester compatible avec le temps imparti. Le plan doit être conforme au programme de l'agrégation interne.

Le candidat n'est pas obligé d'être exhaustif sur le sujet, mais il est souhaitable qu'il puisse expliquer ses choix et motiver l'introduction de telle ou telle notion. Le jury attend avant tout un exposé logique avec des énoncés complets, exacts et correctement quantifiés, des définitions et théorèmes (qu'il ne faut pas confondre) et une présentation rendue attrayante par l'intérêt porté par le candidat au sujet, par de nombreux exemples (significatifs) et quelques figures s'il y a lieu. Donner quelques applications est précieux, surtout si le titre de la leçon le demande explicitement.

Le candidat doit gérer l'espace, le tableau, et le temps qui lui est alloué. Le candidat peut à ce moment consulter ses notes personnelles, mais ne doit pas se contenter de les recopier.

Il termine son exposé en indiquant le point qu'il se propose de développer dans la deuxième partie. Il est fortement déconseillé d'attendre ce moment pour prendre une décision à ce sujet.

Le plan, comme le développement, ne peuvent se limiter à un compte rendu de lecture d'un ouvrage, même de grande qualité.

Souvent, les plans énoncent trop de généralités triviales au début et les candidats, pris par le temps, sacrifient la partie la plus intéressante dédiée aux applications et exemples. Cette dernière partie n'est pas développée et est énoncée sous forme d'un catalogue non maitrisé semblant avoir été recopié en hâte dans un ouvrage.

L'exposé des prérequis et des notations est indispensable dans la plupart des leçons. Parfois, le choix de prérequis trop forts vide la leçon de son sens. Ainsi, un candidat qui traite une leçon sur la trigonométrie ne peut admettre en prérequis les formules d'Euler et se contenter d'en déduire les relations d'addition de la trigonométrie réelle. Autre exemple, la leçon **118** (groupes orthogonaux en dimensions 2 et 3) : un candidat a présenté l'ensemble des propriétés des automorphismes orthogonaux et des matrices orthogonales, ce qui lui a pris du temps et ne lui en n'a guère laissé pour l'étude des groupes orthogonaux en faibles dimensions ; on attendait ici la classification et différentes formes de génération. Il convient donc de fixer judicieusement les prérequis.

Les candidats doivent aussi prendre garde que le sujet choisi peut être traité dans certains manuels au long de plusieurs chapitres. Ainsi, dans la leçon **108** (dimension des espaces vectoriels), admettre en prérequis que si l'espace vectoriel est engendré par n vecteurs, toute famille libre compte au plus n vecteurs, c'est évacuer un point faisant partie intégrante de la leçon.

5.2.3 Le développement

Pendant cette phase de l'interrogation le candidat doit mettre en valeur ses qualités pédagogiques, et doit travailler sans notes ; il doit montrer qu'il a compris ce qu'il expose et le rendre compréhensible à son auditoire :

- il commence par expliquer les idées importantes de la démonstration avant de rentrer dans les détails techniques,
- il s'appuie le plus possible sur des figures, et pas seulement en géométrie,
- il insiste sur les points difficiles,
- il montre qu'il a bien compris le rôle de chacune des hypothèses.

Le candidat a le choix de développer une démonstration ou une application. Ce choix doit être consistant, cohérent avec le niveau de l'exposé et pouvoir être présenté en quinze minutes ; il ne peut assurément pas se limiter à un bref exercice d'application (les exercices ont davantage leur place dans l'épreuve d'exemples et exercices). Il doit porter sur une partie significative de l'exposé : un même développement, bien préparé pendant l'année, peut servir dans plusieurs leçons, mais pas dans toutes. Ainsi, dans la leçon **246** (aires et volumes) les intégrales de

Wallis ne constituent pas un développement approprié. Le théorème sur l'uniforme continuité des fonctions définies et continues sur un espace compact peut évidemment illustrer la leçon sur les fonctions continues sur une partie compacte de $\mathbf{R}^n$ (**206**), mais ce n'est sans doute pas le cœur de cette leçon.

Le choix de l'exposé doit être fait avec soin car il révèle aux examinateurs la compréhension que le candidat a du sujet posé (certains développements beaucoup trop ambitieux ont joué des mauvais tours aux candidats qui s'y étaient engagés).

Les développements doivent mettre en valeur les points essentiels (certains candidats jouent la montre en démontrant avec insistance des points un peu trop évidents).

Le développement ne doit pas être une suite de calculs pendant tout le temps imparti (ce qui risque d'être le cas avec certaines situations d'algèbre linéaire comme le calcul d'un déterminant, l'inversion d'une matrice etc.). Il convient, sur des sujets pouvant amener ce niveau de technicité, de choisir judicieusement les situations de calcul qui seront développées. À ce propos, on rappelle que lors de l'épreuve d'exercices des logiciels de calcul formel sont mis à la disposition du candidat.

Le développement ne peut se réduire au traitement d'un exemple, même soigné, sauf si c'est un exemple réellement fondamental, agissant comme un paradigme ; un exposé d'exemple est plus à sa place dans l'épreuve d'exemples et exercices. En revanche, faire figurer des exemples significatifs dans le plan est de bon aloi. Évoquer des contre-exemples est également recommandé : ce sont souvent des leviers essentiels dans la compréhension d'une notion mathématique.

Nous conseillons donc aux candidats de préparer soigneusement cette partie de l'interrogation.

5.2.4 Le niveau de la leçon

Le jury a entendu nombre d'exposés qu'on attendrait plutôt face au jury du CAPES. On n'attend certes pas des résultats extraordinaires, mais il serait bon que les candidats montrent qu'ils ont progressé en mathématiques et surtout qu'ils se sont approprié les notions qu'ils présentent.

À l'opposé, certains candidats, sans doute poussés par des ouvrages d'apparence séduisante, se placent à un niveau mathématique qui les dépasse et s'engagent à traiter des points délicats, amenant des questions du jury du même niveau de difficulté.

Ajoutons que le jury pourra être indulgent pour un exposé de niveau mathématique modeste à condition qu'il soit bien maitrisé, souligné par des applications judicieusement choisies, et mis en perspective par rapport à plusieurs niveaux d'enseignement et pas seulement au niveau du collège.

5.2.5 Les questions du jury

Ce temps qui conclut l'interrogation a pour but de vérifier la solidité des connaissances et compétences du candidat et de lui permettre de se valoriser. Par ses questions, le jury ne cherche qu'à

– faire corriger une erreur commise, rectifier une imprécision dans le plan ou une démonstration,

– contrôler si la démonstration est comprise ou seulement récitée, par exemple en variant les hypothèses,
– vérifier que le candidat a une maitrise suffisante des sujets abordés : par exemple un candidat qui a énoncé le théorème de Heine ne devrait pas avoir de difficulté à démontrer que la fonction *sinus* est uniformément continue sur toute la droite,
– s'assurer que les résultats (théorèmes) énoncés dans le plan sont suffisamment maitrisés pour être appliqués à un exemple simple (inversion d'une matrice carrée assez simple, réduction d'une matrice symétrique réelle, etc.),
– donner au candidat l'occasion de montrer ses connaissances sur d'autres aspects du sujet ou des applications (c'est-à-dire, sa culture mathématique), tout en restant dans le cadre du programme (à moins que le candidat souhaite s'en éloigner).

5.2.6 Quelques leçons particulières

101 (groupes monogènes) : il convient de donner des exemples autres que dans $\mathbf{Z}$ (sous groupes de $(K[X], +)$, de $(\mathbf{R}, +)$, etc.). On apprécierait des exemples de groupes non monogènes à la fois dans le cas commutatif et non commutatif. Il faut ici maitriser les techniques de calcul telles que le calcul de $\phi(n)$ et éviter les développements sans grand rapport avec le sujet tels que le théorème de Wilson. On peut aussi évoquer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit cyclique, les sous-groupes d'un groupe cyclique, etc. Enfin, les sous-groupes de $\mathbf{R}$, trop souvent évoqués et d'un intérêt limité par rapport à la situation, ont maintes fois donné lieu à des démonstrations peu rigoureuses.

102 (groupes symétriques) : les exemples d'applications de ces groupes aux déplacements et/ou isométries sont souvent évoqués mais les candidats arrivent rarement à les interpréter ; par ailleurs l'étude du groupe des isométries qui conservent un tétraèdre régulier peut faire l'objet d'un développement intéressant.
112 (opérations élémentaires) : le jury attend le recensement des propriétés invariantes par ces opérations élémentaires. On aimerait aussi que soient citées les opérations minimales, c'est-à-dire celles qui engendrent les autres. Le théorème de Gauss-Jordan, qui conduit à l'équivalence de toute matrice de rang r de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ avec une matrice canonique $J_{n,p,r}$, doit conduire à plusieurs applications et peut être démontré de diverses manières. Cette leçon doit aborder la question des algorithmes de calcul, sans nécessairement entrer dans les détails.
113 (déterminants) : voilà typiquement une leçon où les applications ont été souvent sacrifiées au profit d'une fastidieuse suite de définitions et propositions théoriques. Il faut donc éviter de se perdre en préambules théoriques, mais définir clairement le déterminant d'une matrice carrée. La démonstration de légalité $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ a mis plusieurs candidats en difficulté ; on attend une méthode simple ! Dans cette leçon on attend quelques calculs de déterminants ; le déterminant de Vandermonde, pourtant très connu, a plongé quelques candidats dans l'embarras. Les calculs de polynômes caractéristiques peuvent former de bons exemples, mais ne sauraient être les seuls. Il convient aussi de s'interroger sur le calcul effectif, en pratique, des déterminants : la comparaison entre la méthode du pivot (qui doit être mentionnée) et la méthode du développement par cofacteurs est instructive.
On peut aussi proposer des applications géométriques telles que des calculs de volumes et d'aires ou des orientations du plan ou de l'espace.
128 : ici aussi les applications manquent : on pourrait évoquer la détermination de lignes de

niveau, ou encore le théorème de Gauss-Lucas (relatif à l'enveloppe convexe).
137 : on pourrait évoquer la représentation complexe, le cercle d'Euler, etc. Le théorème de Morley a fourni le thème d'un beau développement.
140 (division euclidienne) : l'algorithme d'Euclide n'est pas toujours correctement présenté : il serait intéressant de savoir pourquoi l'algorithme s'arrête ! Plutôt que de démontrer qu'un anneau particulier comme $\mathbf{Z}$ est euclidien, on peut sans plus de complications aborder un cas plus général. Attention à une erreur couramment faite : l'unicité du reste et du quotient a lieu dans $K[X]$ mais pas dans $\mathbf{Z}$. Il est intéressant de citer au moins un exemple d'anneau non euclidien (car non principal). Le nombre de divisions à faire au cours de l'algorithme est aussi un sujet intéressant (théorème de Lamé). On apprécierait aussi des applications, par exemple à la recherche de solutions d'équations diophantiennes.
142 (groupes en géométrie) : se limiter à une présentation du groupe des homothéties et translations est très insuffisant ; on attend ici quelques situations précises où les groupes interviennent (on pourra penser aux frises et pavages).
151 (réduction d'un endomorphisme) : La décomposition de Dunford pourrait faire l'objet d'un développement consistant à condition d'être bien maitrisée. Le calcul des puissances d'une matrice ne doit pas être la seule application proposée.
156 (valeurs propres) : le théorème de d'Alembert concernant les racines d'un polynôme complexe a plusieurs fois été confondu avec celui de Cayley-Hamilton.
158 : avant de s'engager dans des notions délicates, il serait préférable de bien comprendre le lien entre les automorphismes intérieurs et la similitude de matrices carrées de taille 2 ou 3.
162 : de fréquentes confusions entre matrices équivalentes et semblables.
206 : beaucoup de théorie mais peu de rigueur (la distance-produit par exemple n'est pas précisée) et peu d'exemples. En particulier, la notion d'uniforme continuité n'est généralement pas comprise, tandis qu'une question sur la compacité (ou non) de l'ensemble $\{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbf{N}^*\}$ a causé quelques soucis...
209 : plutôt qu'un catalogue de définitions et propriétés, il serait souhaitable d'exhiber des exemples/contre-exemples permettant de bien comprendre l'importance des hypothèses.
213 (exponentielle complexe) : la définition de la fonction exponentielle complexe et ses conséquences doivent être bien appréhendées (penser aux matrices et aux méthodes de résolution approchée des équations différentielles). On attend aussi l'évocation de l'argument d'un nombre complexe.
217 et **219** (fonction réciproque) : on évitera de traiter cette leçon au niveau CAPES. L'interprétation géométrique n'est pas assez utilisée par les candidats (par exemple, pour étudier la concavité de la fonction réciproque d'une fonction convexe). On attend ici des exemples originaux autres que les fonctions sin, cos ou exp, par exemple les fonctions hyperboliques qui sont rarement évoquées comme exemples de fonctions dans les leçons d'analyse. On peut notamment donner des exemples dans le domaine des équations différentielles non linéaires ou celui des variables aléatoires à densité.
Les propriétés conservées par un homéomorphisme d'un intervalle sur $\mathbf{R}$ peuvent être énoncées.
225 (systèmes différentiels à coefficients constants) : un candidat a proposé un plan d'étude fondé sur l'exponentielle de matrice puis réalisé un développement n'utilisant pas l'exponentielle mais une autre technique ; il s'agit là d'un manque de cohérence.
235 (exponentielles et logarithmes) : l'essentiel dans cette leçon est d'introduire l'exponentielle et le logarithme népériens, ainsi que leurs diverses propriétés, sans doute aussi l'exponentielle d'un nombre complexe ou d'une matrice. On veillera en revanche à ne pas centrer cette leçon

sur les exponentielles et logarithmes de base $a \neq e$, dont les propriétés vont d'elles-mêmes lorsque les deux fonctions fondamentales ont été correctement définies.

242 (suites de nombres réels) : là encore il ne faut pas perdre son temps sur des notions élémentaires occupant les trois quarts du plan et ne pas faire une leçon au niveau CAPES, mais aller droit au but en donnant les théorèmes essentiels et leurs idées de démonstrations. Donner à la fois des exemples génériques servant à l'étude générale des suites et des exemples plus subtils avec des contre-exemples.

La notion de suites adjacentes n'est pas toujours maitrisée. En application du théorème de Bolzano-Weierstrass, penser à donner des applications précises et pas seulement des théorèmes bien connus.

255 (algorithmes d'approximation du nombre π) : on aimerait voir ici des interprétations géométriques des suites proposées lorsque cest possible.

5.3 L'épreuve orale d'exemples et exercices

5.3.1 Principe et déroulement de l'épreuve

L'épreuve dite d'exemples et exercices consiste à présenter à partir de situations particulières (d'où le nom de l'épreuve) comment le candidat conçoit la pratique des mathématiques par rapport aux connaissances fondamentales, aux différents niveaux d'enseignement et aux outils qui peuvent être éventuellement mobilisés (logiciels, programmation).

Pour simplifier ce qui suit, nous ne parlerons que d'exercices mais on pourra lire à chaque fois exemples ou exercices.

À son arrivée, le candidat tire au sort une enveloppe comportant deux thèmes d'exercices ainsi qu'une clé USB. Il dispose alors de trois heures pour préparer l'un des deux thèmes, pendant lesquelles il peut librement consulter les ouvrages mis à sa disposition par la bibliothèque de l'agrégation, ou bien ceux qu'il aura pris soin d'apporter avec lui. Il peut utiliser les logiciels qui sont mis à sa disposition pour préparer la partie de sa présentation qui pourra y faire appel. Les fichiers créés par le candidat sont sauvegardés sur la clé USB qui est par la suite transmise au jury.

Pendant sa préparation, le candidat sélectionne trois à six exercices correspondant au thème retenu et rédige un document comportant la liste des énoncés, ainsi que les motivations et remarques correspondantes. À l'issue de la préparation, des photocopies de ce document sont réalisées par les appariteurs ; ces photocopies sont remises aux examinateurs et l'épreuve orale proprement dite peut alors commencer.

L'épreuve se déroule alors en trois temps :

1. Présentation motivée de l'ensemble des exercices sélectionnés par le candidat (durée maximale de 15 minutes).
2. Résolution commentée d'un des exercices au choix du candidat parmi ceux qu'il vient de présenter (durée maximale de 15 minutes).
3. Questions du jury (durée minimale de 15 minutes).

5.3.2 Utilisation de logiciels

Les mathématiques d'aujourd'hui utilisent très largement les moyens mis à disposition par les progrès de l'informatique, qu'il s'agisse de logiciels prêts à l'emploi ou d'algorithmes résolvant des problèmes de manière explicite. Cette situation a modifié de manière très importante les conditions de l'exercice du métier d'enseignant : d'une part, certaines tâches techniques (longs calculs, tracés de courbes, modélisation de situations géométriques) sont largement facilitées par des logiciels spécialisés et d'autre part différents logiciels interviennent couramment comme outils pédagogiques. Enfin, on doit mentionner l'introduction récente de l'algorithmique dans les programmes de mathématiques au niveau du lycée.
C'est pourquoi l'une des deux épreuves orales évalue l'aptitude des candidats à faire des mathématiques dans ce contexte nouveau.
Pratiquement, au cours de l'épreuve d'exemples et exercices, les candidats disposent d'un matériel informatique, fonctionnant sous Linux, et d'un choix de logiciels qui sont précisés au chapitre 3, page 31. Les candidats ont la possibilité, **s'ils le souhaitent**, d'illustrer **un** (et pas plus d'un) des exemples ou exercices constituant leur leçon au moyen d'un algorithme effectivement programmé ou de l'usage d'un logiciel. Il convient que les illustrations algorithmiques ou logicielles apportent une réelle plus-value par rapport au sujet traité, et ne se limitent pas à une suite d'actions de type presse-bouton. Les logiciels mis à disposition, notamment de calcul formel, peuvent également servir pour venir à bout plus efficacement de situations de calcul (notamment en algèbre linéaire), sans qu'il soit absolument nécessaire de présenter le détail des commandes face au jury. On pourra également utiliser avec profit des logiciels de calcul numérique afin de proposer des applications significatives des exemples proposés.
Le but de la présentation effectuée par le candidat n'est ni une description factuelle d'une succession d'actions ni la démonstration d'une quelconque virtuosité technique ou performance matérielle. Au contraire, le jury attend la mise en évidence d'un lien fort entre les fondements mathématiques et les illustrations informatiques ou logicielles, sans perdre de vue l'arrière-plan pédagogique. Concernant la présentation des algorithmes, on pourra se contenter d'une rédaction dans un pseudo-langage en français ; le fonctionnement effectif (sur machine) ne sera qu'un élément parmi d'autres. Enfin, les candidats doivent veiller à ne pas passer plus de la moitié de leur temps d'exposé à développer cet aspect des choses.
Bien que les notions de complexité et de preuve d'algorithmes ne figurent pas dans le programme du concours, les candidats doivent prendre conscience du fait que ce sont des notions qui peuvent surgir assez rapidement à l'occasion de telle ou telle étude (que l'on songe, par exemple, aux méthodes de calcul de déterminants).
Lors de la session 2010, l'usage des logiciels est demeuré modeste (environ un candidat sur cinq), ce qui était attendu compte tenu de la nouveauté de la situation. Plusieurs candidats n'ayant pas eu recours à cette possibilité ont exprimé, au cours de leur interrogation, qu'ils auraient souhaité se servir d'un logiciel mais y avaient renoncé faute de temps. Ceux qui s'y sont mesurés en ont généralement tiré un parti intéressant, par exemple pour l'illustration de situations de géométrie plane, ou encore les tracés de courbes diverses, les études de vitesse de convergence de suites ou même pour simuler le hasard, etc. Quelques candidats ont eu des difficultés pour généraliser les situations présentées.
Pour la session 2011, le jury attendra un usage plus systématique des moyens informatiques mis à disposition pour les sujets qui s'y prêtent, et rappelle aux candidats que la prise en main d'un outil le jour du concours n'est pas une attitude raisonnable. Les candidats sont donc

invités à télécharger (sur le site du jury : `http://agreg.org/interne`) un système très voisin de celui qui servira lors de la prochaine session et qui tient entièrement dans une clé USB.

5.3.3 Présentation motivée des exercices

Il s'agit d'expliquer soigneusement les raisons qui ont conduit au choix des exercices. Celles-ci peuvent être d'ordre pédagogique ou d'ordre mathématique, l'un n'excluant évidemment pas l'autre. Voici quelques suggestions quant aux motivations possibles :

Objectif et motivations : Il est important d'indiquer à quel public s'adressent les exercices et ce qu'ils supposent connu de ce public. Il faut également décrire quel est l'objectif de chaque exercice : illustration ou complément d'un résultat de cours, entrainement à une technique de calcul particulière, mise en évidence d'une propriété remarquable, ... On peut préciser la nature du travail de l'élève (exercice d'entrainement, de réinvestissement, d'évaluation, de recherche...) ainsi que les apprentissages visés.
Un exercice ne peut consister en la démonstration d'un théorème du cours. Par exemple, le fait que les seuls idéaux de l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers en sont les sous-groupes $n\mathbf{Z}$ doit raisonnablement faire partie d'un plan de cours sur la divisibilité dans $\mathbf{Z}$, mais ne saurait être proposé en exercice de la seconde épreuve.

Niveau : Les difficultés éventuelles d'un énoncé doivent être soulignées. Le souci de graduer ces difficultés ou d'aider à les surmonter par des indications appropriées constitue un aspect possible de la présentation des exercices.

Cohérence : Les énoncés ne doivent pas constituer une collection hétéroclite, sans que jamais se dégage une quelconque méthode un peu générale : leur ensemble doit posséder un certain degré de cohérence, variable selon les sujets. Il serait bon, par exemple lors de la présentation, que les candidats puissent dégager les idées, méthodes générales qui entrent en jeu même si elles sont illustrées dans les exercices sur des cas particuliers. Indiquer les connexions pouvant relier certains énoncés est une démarche appréciée, de même que l'indication de la place de ces exercices dans une séquence d'enseignement. Souvent, le manque de cohérence éprouvé par le jury provient de ce que les candidats s'inspirent de quatre à cinq ouvrages différents, qui entrent en conflit les uns avec les autres au niveau des notations, des hypothèses relatives aux résultats fondamentaux [1]. Par ailleurs, plusieurs propositions d'exercices étaient franchement hors-sujet.

Intérêt : Le jury apprécie de trouver quelques exercices réellement intéressants dans le choix proposé ; le fait qu'un exercice apparaisse dans un livre ne garantit aucunement qu'il présente de l'intérêt. Un exercice peut apporter un éclairage particulier sur une notion, ou laisser entrevoir un développement de celle-ci ou encore en donner une application pertinente. De tels critères peuvent être mis en avant pour justifier du choix d'un exercice. Lorsqu'il existe diverses méthodes ou outils pour résoudre un problème donné, un exercice peut avoir pour objectif d'en comparer certaines, ne serait-ce que sur des exemples. Ainsi, une leçon sur les congruences ne peut pas être illustrée par la seule résolution d'un système de deux congruences.

Originalité : Le choix d'un exercice doit relever d'un véritable investigation didactique adaptée au sujet retenu, et non se limiter au recyclage de quelques situations rabâchées. De fait, les candidats semblent tous s'inspirer des mêmes sources, peu ou prou. Ainsi, on a fréquemment

1. parfois même au niveau de la théorie de l'intégration sous-jacente, ce qui en a gêné plus d'un !

entendu des exercices autour du nombre 4444^{4444}, des déterminants de Gram ou de Cauchy, etc.

Les résultats

La pertinence du choix de l'exercice est un élément important d'appréciation. Il s'agit de trouver un juste équilibre entre deux situations extrêmes : on voit parfois des candidats énumérer quatre énoncés d'exercices plutôt consistants pour finalement proposer la résolution d'un premier exercice très élémentaire (effet désastreux garanti) ; et l'excès inverse, qui consiste à s'engager dans la résolution d'un exercice d'une complexité mal mesurée, est également fort risqué.

Motiver le choix d'une liste d'exercices, c'est expliquer la pertinence de ce choix, préciser les prérequis, situer les exercices dans leur contexte, commenter leur apport sur le plan pédagogique … tout cela doit faire l'objet d'une réflexion personnelle et d'un réel questionnement.

On attend des candidats qu'ils ne donnent pas des exercices tous isomorphes (utilisant les mêmes méthodes ou traitant le même sujet) mais plusieurs exercices bien spécifiques dans des domaines différents touchant aussi bien la géométrie que l'algèbre, l'analyse et même les probabilités. Ces exercices ne doivent pas relever dune astuce mais donner une méthode de résolution réutilisable et pédagogiquement efficace.

Une autre erreur à éviter est le hors sujet : le candidat doit veiller à ce que les exercices qu'il propose entrent bien dans le cadre délimité par le titre du sujet. De plus, si l'intitulé est du type « Exercices faisant intervenir telle notion … », il faut bien comprendre qu'on ne demande pas de simples exercices d'entrainement sur la notion en question. À titre d'exemple, si l'intitulé est « Exercices faisant intervenir des déterminants », on ne saurait se limiter au calcul de quelques déterminants considérés comme un but en soi. On attend en revanche des exercices montrant diverses utilisations de cette notion (à titre indicatif : résolution des systèmes de Cramer, calcul des valeurs propres d'un endomorphisme à l'aide du polynôme caractéristique, déterminants de Hankel, jacobien et caractérisation des difféomorphismes, caractérisation de la positivité des matrices symétriques réelles et application à la convexité d'une fonction numérique de plusieurs variables réelles par sa matrice Hessienne, etc.).

Bien souvent, les candidats n'ont pas pris la peine de réfléchir à cette première partie de leur oral et se contentent de donner lecture de leurs énoncés en quelques minutes. D'autres encore, pratiquent avec plus ou moins de conviction la stratégie du « remplissage », qui consiste à occuper au mieux les quinze minutes dont ils disposent, en diluant la présentation de leurs exercices à grands coups de phrases creuses comme j'ai choisi l'exercice 1 parce qu'il était facile, le 2 parce qu'il était un peu plus dur, le 3 parce qu'il est difficile et le 4 parce qu'il est intéressant. Un bavardage pseudopédagogique n'est pas non plus d'un grand effet, surtout quand la résolution qui suit bute sur des obstacles importants.

D'autres enfin se contentent d'énoncer quelques théorèmes en rapport avec les exercices : ce n'est pas cela non plus qui est attendu.

Cependant, certains candidats présentent très honorablement cette première partie de l'épreuve, et mettent ainsi en valeur leurs compétences pédagogiques et leurs acquis professionnels. Il va de soi qu'il en est tenu compte dans la notation de l'épreuve.

5.3.4 Résolution détaillée d'un exercice

À l'issue de la présentation des exercices, le candidat désigne un exercice qu'il se propose de résoudre en détail. Insistons sur le fait que ce choix revient au candidat et non aux examinateurs. Au cours de cette phase, tout comme pour la précédente, les examinateurs n'interviennent pas et le candidat doit faire preuve d'autonomie. Certains choix d'exercices peuvent s'avérer malencontreux, notamment lorsque des calculs sont requis ; les candidats confrontés à cette situation ont souvent eu du mal à gérer la longueur et la technicité des calculs. On recommande, en pareil cas, d'exposer la démarche en premier lieu, puis d'approfondir les points les plus marquants ; le jury demandera, le cas échéant, des détails complémentaires.
Plusieurs candidats ont eu des difficultés pour venir à bout des calculs en raison des nombreuses erreurs qu'ils commettaient. Les démarches de calcul ne sont pas un but en soi, mais si elles constituent une part importante de l'exercice choisi elles doivent être maitrisées. À ce propos, on rappelle que des logiciels de calcul formel sont mis à la disposition des candidats.
Les candidats doivent aussi s'assurer que les énoncés des exercices qu'ils proposent ne comportent pas d'erreurs (cette situation a déstabilisé plus d'un candidat).
Ajoutons encore que certains candidats s'avèrent incapables de fournir un énoncé correct des théorèmes qu'ils utilisent lors de la résolution de leurs exercices. Ainsi, le changement de variable dans une intégrale simple devrait pouvoir être justifié au moyen d'un énoncé précis (tout particulièrement quand la fonction intégrée n'est pas continue). Autre exemple, le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre (Leibniz) peut être énoncé de diverses façons, dont les hypothèses diffèrent sensiblement et influent sur la résolution d'un exercice faisant intervenir ce théorème ; un candidat incapable de produire un énoncé correct du théorème de Leibniz quand il en a besoin sera donc fortement pénalisé. Dernier exemple : les exercices de développement d'une fonction en série de Fourier nécessitent la connaissance des hypothèses du théorème de Dirichlet !

5.3.5 Quelques sujets particuliers

305 (exercices faisant intervenir les nombres premiers) : les définitions intervenant dans les propriétés énoncées doivent être connues. Les propriétés sur les congruences doivent rapidement pouvoir être démontrées. Le théorème de Wilson ne constitue pas un test de primalité particulièrement efficace.
309 (exercices utilisant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme) : ce point a été bien traité avec des applications intéressantes tant en géométrie pour déterminer les points doubles d'une courbe paramétrée qu'en algèbre pour la démonstration des formules de Newton et de leur utilisation. On pourrait suggérer un exercice sur les relations coefficients-racines d'un polynôme et les valeurs propres d'une matrice d'ordre 2. On attend des candidats choisissant ces exercices une certaine aisance dans les calculs devant être menés à bien.
309-316-317 : des calculs sur les polynômes caractéristiques de matrices par blocs ont été effectués mais sans rigueur.
313 : il est parfois difficile aux candidats de repérer les vecteurs propres évidents, la résolution de système linéaire étant leur première et parfois unique approche.
321 : on pouvait évoquer la recherche des axes de symétrie pour les coniques et quadriques. L'usage d'un logiciel de calcul formel peut ici rendre quelques services.
334 : un bon logiciel de géométrie dynamique (traitant aussi les coniques) permet de visualiser

la situation proposée (à titre de conjecture ou de vérification) et parfois de définir les méthodes qui serviront pour la résolution.
335 (également 147) : il serait bon que les candidats introduisent certaines des courbes qu'ils étudient à partir de problèmes géométriques. Ainsi, plutôt que d'étudier l'ensemble d'équation $r^2 = a\cos(2\theta)$, il est sans doute plus intéressant de considérer d'abord l'ensemble des points M du plan qui vérifient la relation $MA \times MB = d^2$ où d désigne la demi-distance des deux points A et B. De même, on pourra introduire de façon géométrique certaines courbes cissoïdales, ou de façon cinématique la cycloïde ou la cardioïde, ou plus généralement les hypo- et épi-cycloïdes dont les candidats proposent souvent l'étude graphique dans le cas $n = 3$.
337 (également 161) : avec de tels intitulés, il n'est pas inutile de proposer un exercice donnant un sens géométrique clair à la notion de courbure, par exemple démontrer qu'un cercle qui est tangent en un point $M(s_0)$ à un arc birégulier et qui passe par un point $M(s)$ admet pour limite quand s tend vers s_0 le cercle centré au centre de courbure et dont le rayon algébrique est $R(s_0)$. On pourra également proposer les formules usuelles donnant les vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet, avec des applications.
L'étude des mouvements à accélération centrale a toute sa place ici. On vérifie que la trajectoire de M est plane lorsqu'elle ne passe pas par le centre O. En supposant de plus l'accélération centrale newtonienne, on pourra établir, par exemple à l'aide des formules de Binet, que la trajectoire du point M est incluse dans une conique. Ce dernier point pourra également intervenir utilement dans une leçon sur les coniques.
339 : il convient de ne pas se limiter aux polygones et polyèdres réguliers ; des situations en lien avec les coniques, quadriques, ou encore les frises et pavages, permettent à ce sujet d'avoir beaucoup d'attrait. Certains logiciels permettent d'illustrer rapidement les groupes de transformations sous-jacents et leur action sur les figures.
341 : les recherches de lieux géométriques se prêtent admirablement à l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique ; il convient cependant que le logiciel serve à autre chose qu'à voir et faire voir une solution, par exemple en mettant en évidence la démarche exploratoire qui mène aux conjectures et les investigations complémentaires qui permettent de construire une preuve.
343 : ce sujet a donné lieu à une présentation brillante (malheureusement suivie d'un développement plus terne) ; les candidats qui font l'effort de s'approprier réellement un domaine un peu marginal comme la cinématique sont toujours écoutés avec un grand intérêt par le jury.
347 : les applications de la trigonométrie ne se limitent pas à la géométrie, on pourra penser aux calculs de primitives ou encore aux polynômes de Tchebychef.
401-403-406-407-420 : les études numériques (pouvant s'appuyer sur l'usage d'un logiciel) sont ici appréciées. On pourrait évoquer les sommes de Riemann, l'estimation de la convergence de la méthode de Newton. La recherche d'équivalents est rarement maitrisée.
412 : le choix d'une fonction rationnelle est pertinent à condition que la décomposition en éléments simples n'occupe pas la totalité du temps imparti.
413 : l'idée n'est pas d'obtenir une équation différentielle à partir d'une série mais de chercher les solutions d'une équation différentielle donnée. Ajoutons que la dérivation des séries trigonométriques est mal connue.
417 (exemples d'approximations de fonctions numériques) : dans ce sujet on évitera de faire un cours sur l'approximation des fonctions par des polynômes et on insistera sur l'utilisation des approximations citées (nombre π , approximation uniforme, calcul approché dune intégrale par la méthode de Gauss, etc.).

420 (exemples d'utilisations de suites ou de séries pour le calcul d'intégrales) : les exercices proposés doivent présenter un intérêt autre que calculatoire. Le théorème d'intégration terme à terme n'est pas maitrisé, et il en va de même des notions de o, d'équivalents et de restes de séries.
428 : le tracé des courbes intégrales apporte une dimension graphique très parlante, source de questionnements nouveaux. Un candidat a montré des courbes intégrales avec un logiciel de géométrie dynamique mais sans en comprendre le sens, maitrisant mal les notions de condition initiale et de problème de Cauchy.
430 : pour illustrer cette leçon, on pensera bien sûr aux oscillateurs linéaires amortis ou non-amortis qui interviennent en mécanique (masse suspendue à un ressort) ou en électricité (circuit RLC). On pourra aussi s'intéresser aux oscillateurs linéaires couplés : si on considère une suite constituée alternativement d'un ressort, d'une masse 1, d'un ressort, d'une masse 2, et d'un ressort, et qui est fixée en ses deux extrémités, alors les abscisses x_1 , x_2 des déplacements des deux masses par rapport à leurs positions d'équilibre vérifient les équations $mx_1'' = -Kx_1 - K(x_1 - x_2)$ et $mx_2'' = -Kx_2 - K(x_2 - x_1)$, où K désigne la constante commune des trois ressorts et m les valeurs égales des deux masses. La diagonalisation de la matrice de ce système permet d'étudier les mouvements des deux masses, et de les interpréter comme une superposition des modes propres du système (et tout ceci se généralise évidemment à un nombre supérieur de masses et ressorts).
Enfin, on peut proposer un exercice simple à propos d'une équation aux dérivées partielles (comme l'équation de la chaleur, l'équation des cordes vibrantes) ou d'une équation autonome non linéaire.
434 : cette leçon peut fournir l'occasion de montrer le fonctionnement (et les limites) des systèmes de calcul formel. Un candidat a judicieusement choisi d'aborder une intégrale triple et de représenter son domaine à l'aide d'un logiciel, afin d'en faire ressortir les symétries et ainsi simplifier le calcul.
435 (exemples d'études probabilistes de situations concrètes) : des exercices permettant d'étudier quelques aspects simples de marches aléatoires sur $\mathbf{Z}$ ou sur $\mathbf{Z}^2$ pourront être l'occasion d'introduire naturellement des lois binomiales et de calculer la probabilité de retour à l'origine à l'instant n, ou d'obtenir le nombre moyen de passages à l'origine à l'instant n et un équivalent de celui-ci, ou encore d'étudier l'instant de premier retour à l'origine.
441 : les notions de condition initiale et de problème de Cauchy sont mal maitrisées.
442 : on apprécierait la présentation d'au moins un exercice présentant une application des probabilités à l'algèbre ou à l'analyse (par exemple, le théorème de Weierstrass ou la fonction d'Euler, etc.). Les illustrations informatiques autour de la méthode de Monte-Carlo ont été et seront appréciées (le jury a notamment apprécié le travail d'une candidate qui avait trouvé moyen de simuler le tirage aléatoire d'un point dans un carré et un disque inclus dans le carré au moyen d'un logiciel de géométrie).

5.3.6 Questions du jury

Ces questions peuvent être de plusieurs sortes. Tout d'abord, il est bien souvent demandé au candidat de donner des précisions sur la résolution de l'exercice qu'il a proposé. Cela permet de corriger d'éventuels lapsus (ou de mettre en évidence une faille dans la démonstration) et de s'assurer que le candidat a réellement saisi les divers aspects de la résolution (en examinant par exemple l'impact d'une modification des hypothèses sur le résultat annoncé). Le candidat doit s'attendre à être interrogé au moins partiellement et parfois en détail sur la résolution de **chaque exercice** qu'il propose (certains candidats se sont laissé surprendre par un tel questionnement). À défaut de connaitre par cœur tous les calculs en détails, il faut au minimum connaitre les méthodes utilisées et les différents enchainements de la résolution.

Par ailleurs, les examinateurs cherchent à déterminer si les notions apparaissant dans tel ou tel énoncé sont effectivement connues du candidat. En ce sens, le candidat, par un choix d'exercices trop ambitieux, risque d'élever le niveau des questions qui peuvent lui être posées. Il n'est pas recommandé d'évoquer des questions à propos desquelles on n'a aucun recul.

Pour terminer, soulignons clairement que les questions du jury n'ont en aucun cas pour but de déstabiliser le candidat. Elles visent simplement à cerner au mieux l'étendue de ses connaissances et compétences afin de le classer, le plus justement possible, par rapport aux autres candidats.

5.3.7 Les attentes du jury

Comme on l'aura compris dans les paragraphes qui précèdent, le jury base son évaluation sur un ensemble de critères variés permettant d'apprécier à leur juste valeur les prestations des candidats. Sans entrer dans les détails, le jury attache de l'importance aux points suivants :

- le candidat maitrise les mathématiques au niveau attendu pour le concours (notamment en ce qui concerne les énoncés des définitions et théorèmes, ainsi que le raisonnement logique)
- le candidat présente un réel contenu mathématique ;
- le candidat sait mobiliser ses connaissances mathématiques en vue de résoudre un problème ou d'expliquer un phénomène ;
- le candidat sait motiver ses choix et ses actions, expliquer les raisons de sa démarche ;
- le candidat assure une cohérence entre les différents éléments qu'il présente ;
- le candidat sait communiquer efficacement en se servant de différents supports (oral, tableau, écran projeté) ;
- le candidat fait preuve d'esprit d'initiative et d'une bonne réactivité en réponse aux questions posées.

5.4 Liste des sujets de la session 2010

Leçons d'algèbre et géométrie

101 : Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.

102 : Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.

103 : Congruences dans $\mathbf{Z}$, anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

104 : Nombres premiers.

106 : PGCD dans K[X], où K est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.

107 : Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels.

108 : Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.

109 : Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.

110 : Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.

111 : Changements de bases en algèbre linéaire. Applications.

112 : Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.

113 : Déterminants. Applications.

118 : Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.

120 : Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Applications.

122 : Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Applications géométriques.

123 : Nombres complexes et géométrie.

125 : Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications.

126 : Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, formes réduites.

127 : Géométrie du triangle.

128 : Barycentres. Applications.

130 : Droites et plans dans l'espace.

131 : Projections et symétries dans un espace affine de dimension finie.

137 : Cercles et droites dans le plan affine euclidien.

140 : Division euclidienne.

142 : Utilisation de groupes en géométrie.

143 : Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.

144 : Le rang en algèbre linéaire.

145 : Utilisation de transformations en géométrie.

146 : Coniques.

147 : Courbes planes paramétrées.

148 : Angles.

149 : Équations et géométrie.

150 : Diverses factorisations de matrices.

151 : Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

155 : Systèmes linéaires.

156 : Valeurs propres.

157 : Arithmétique dans $\mathbf{Z}$.

158 : Actions de groupes. Exemples et applications.

159 : Algorithme d'Euclide dans $\mathbf{Z}$. Calcul de PGCD et de coefficients de Bézout. Applications.

160 : Algorithmes du pivot de Gauss. Applications.

161 : Étude métrique des courbes planes.

162 : Rang d'une matrice ; déterminations, algorithmes de calcul.

Leçons d'analyse et probabilités

201 : Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications.

202 : Séries à termes réels positifs. Applications.

203 : Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence (les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs étant supposés connus).

204 : Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.

205 : Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation des fonctions.

206 : Parties compactes de $\mathbf{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications.

207 : Théorème des valeurs intermédiaires. Applications en analyse, en analyse numérique.

208 : Théorème du point fixe. Applications.

209 : Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.

210 : Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.

212 : Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés. Exemples.

213 : Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre π.

215 : Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.

216 : Théorèmes des accroissements finis. Applications.

217 : Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

218 : Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.

219 : Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.

220 : Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration de l'erreur.

221 : Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$ (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.

222 : Intégrale d'une fonction numérique continue par morceaux sur un segment. Propriétés.

223 : Intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.

224 : Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

225 : Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants ; écriture matricielle. Exemples.

227 : Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité. Fonctions composées. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Exemples.

228 : Théorème des accroissements finis pour une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$. Étude des extremums.

229 : Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variable aléatoire de loi binomiale. Approximations de cette loi.

230 : Probabilité conditionnelle et indépendance. Couples de variables aléatoires. Exemples.

231 : Espérance, variance ; loi faible des grands nombres.

232 : Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.

233 : Approximation d'un nombre réel. Théorie et méthodes.

234 : Équations différentielles.

235 : Exponentielles et logarithmes.

236 : Continuité, dérivabilité des fonctions d'une variable réelle.

237 : Intégrales et primitives.

238 : Le nombre π.

240 : Problèmes d'extremums pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.

241 : Diverses notions de convergence. Exemples.

242 : Suites de nombres réels.

243 : Différentiabilité d'une fonction numérique de deux variables réelles, gradient ; applications.

244 : Égalités et inégalités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Parseval, convexité...

245 : Équations fonctionnelles.

246 : Applications de l'analyse au calcul des grandeurs (aires, volumes...).

248 : Mouvement à accélération centrale.

249 : Loi normale en probabilités.

250 : Algorithmes de résolution approchée d'une équation numérique.

252 : Algorithmes de calcul approché d'intégrales.

253 : Algorithmes d'approximation des solutions d'une équation différentielle.

254 : Algorithmes d'approximation d'un nombre réel.

255 : Algorithmes d'approximation du nombre π.

256 : Vitesse de convergence, accélération de convergence.

Exemples et exercices d'algèbre et géométrie

301 : Exercices sur les groupes.

302 : Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans $\mathbf{Z}$.

303 : Exercices faisant intervenir la division euclidienne.

304 : Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.

305 : Exercices faisant intervenir les nombres premiers.

306 : Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM et mettant en œuvre des algorithmes associés.

307 : Exercices faisant intervenir des dénombrements.

308 : Exercices faisant intervenir les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

309 : Exercices faisant intervenir polynômes et fractions rationnelles sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

310 : Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.

311 : Exercices faisant intervenir la notion de rang.

312 : Exercices faisant intervenir des matrices inversibles.

313 : Exercices faisant intervenir des systèmes linéaires.

314 : Exercices faisant intervenir des déterminants.

315 : Exercices faisant intervenir la recherche et l'emploi de vecteurs propres et valeurs propres.

316 : Exercices faisant intervenir la réduction des endomorphismes.

317 : Exercices sur les endomorphismes diagonalisables.

318 : Exercices faisant intervenir des projecteurs ou des symétries.

319 : Exercices faisant intervenir des méthodes ou des algorithmes de calcul en algèbre linéaire.

320 : Exercices sur les isométries vectorielles dans les espaces euclidiens en dimension 2 et en dimension 3.

321 : Exercices faisant intervenir la réduction des matrices réelles symétriques.

322 : Exercices sur les formes quadratiques.

323 : Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.

324 : Exercices faisant intervenir des similitudes planes directes ou indirectes.

325 : Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimension 2 et en dimension 3.

326 : Exercices faisant intervenir la notion de barycentre.

327 : Exercices faisant intervenir des applications affines.

329 : Exercices sur les aires et les volumes.

330 : Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimension 2 et en dimension 3.

331 : Exercices sur la cocyclicité.

332 : Exercices sur les cercles.

334 : Exercices sur les coniques.

335 : Exemples d'étude de courbes planes.

337 : Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).

339 : Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.

340 : Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.

341 : Exercices de construction en géométrie plane.

342 : Exercices de géométrie faisant intervenir le choix d'un repère.

343 : Exercices de cinématique du point.

345 : Exercices sur les triangles.

346 : Exemples de résolution de problèmes modélisés par des graphes.

347 : Exercices faisant intervenir la trigonométrie.

Exemples et exercices d'analyse et probabilités

401 : Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes.

402 : Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.

403 : Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.

404 : Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.

405 : Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.

406 : Exemples de comportement asymptotique de suites ; rapidité de convergence ou de divergence.

407 : Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.

408 : Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.

409 : Exercices sur les suites de polynômes orthogonaux.

410 : Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions d'une variable réelle.

411 : Exemples d'étude de fonctions définies par une série.

412 : Exemples de développements en série entière. Applications.

413 : Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

414 : Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.

415 : Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle.

417 : Exemples d'approximations de fonctions numériques ; utilisations.

418 : Exemples d'utilisation de développements limités.

419 : Exemples d'utilisation d'intégrales pour l'étude de suites et de séries.

420 : Exemples d'utilisation de suites ou de séries pour l'étude d'intégrales.

421 : Exemples de calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

422 : Exemples d'étude d'intégrales impropres.

423 : Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.

425 : Exemples de calculs d'aires et de volumes.

426 : Exemples de calculs d'intégrales multiples.

427 : Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.

428 : Exemples de résolution d'équations différentielles scalaires.

429 : Exemples de résolution de systèmes différentiels linéaires.

430 : Exemples d'équations différentielles issues des sciences expérimentales ou de l'économie.

431 : Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable, d'une fonction numérique de deux variables.

432 : Exemples d'approximations d'un nombre réel.

433 : Approximations du nombre π.

434 : Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.

435 : Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes.

437 : Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.

438 : Exemples de problèmes de dénombrement.

439 : Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue.

440 : Exemples de calculs de la longueur d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$.

441 : Exemples de systèmes différentiels linéaires $Y' = AY$ à coefficients réels constants en dimension 2. Allure des trajectoires.

442 : Exemples d'exercices faisant intervenir le calcul des probabilités.

443 : Exemples de méthodes et d'algorithmes de résolution approchée d'équations $F(X) = 0$.

Chapitre 6

Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques

AABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT Press
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	Masson
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	Vuibert
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	Dunod
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	Cambridge
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	Cassini
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 1A - Topologie	Ellipses
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 1B - Fonctions numériques	Ellipses
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 2 - Suites et séries numériques	Ellipses
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 3 - Analyse fonctionnelle	Ellipses
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 5 - Algèbre générale, polynômes	Ellipses

ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie	Ellipses
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	Ellipses
ANDREWS G.	Number Theory	Dover
APPLE A.W.	Modern compiler implementation, in C	Cambrigde
APPLE A.W.	Modern compiler implementation, in Java	Cambrigde
APPLE A.W.	Modern compiler implementation, in ML	Cambrigde
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie, Tome I	Ellipses
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie, Tome II	Ellipses
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	Dunod
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse tome 2	Dunod
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques, 1. Algèbre	Dunod
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques, 2. Analyse	Dunod
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques, 3. Compléments d'analyse	Dunod
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques, 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	Dunod
ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique	Ediscience
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Lectures on partial differential equations	Springer Universitext
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR

ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gauthier-Villars
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gabay
ARTIN M.	Algebra	Prentice Hall
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée, Tome 1	PUF
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée, Tome 2	PUF
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	Belin
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	Masson
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	Masson
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	Masson
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms, Introduction to design & analysis	Addison Wesley
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A.** **PETIT A.** **SANTHA M.** **WEIL P.** **ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	Springer
BAJARD J.-C.	Exercices d'algorithmique	International Thomson
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	Hermann
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	Belin
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques, Tome 1	Masson
BASS J.	Cours de Mathématiques, Tome 2	Masson

BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	Springer
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	Mc Graw Hill
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod
BERCU B **CHAFAI D.**	Modélisation stochastique et simulation	Dunod
BERGER M.	Géométrie tome 2	Nathan
BERGER M.	Géométrie, 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie, 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie, 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie, 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie, 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie, Index	Cédic/Nathan
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	Cédic/Nathan
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	Armand, Colin
BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, Journées mathématiques X-UPS 2000	Editions de l'X
BHATIA R.	Matrix analysis	Springer
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	Prentice Hall
BIDEGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	Springer
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	Oxford Science, Publications
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF

BOAS R.	A primer of real functions	Mathematical association of America
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	Masson
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.**	Optimisation numérique	Springer
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	Hermann
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III	Hermann
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII	Hermann
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Topologie générale, chapitres V à X	Hermann
BOURGADE P.	Olympiades internationales de mathématiques	Cassini
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	Hermann
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	Springer
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	Masson
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration, Cours et exercices, 3ème édition	Vuibert
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	Armand, Colin
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	Cambridge
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire, 1. Espaces vectoriels , Polynômes	Ellipses
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire, 2. Matrices et réduction	Ellipses
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux vol I	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF

CARREGA J.C.	Théorie des corps	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	Hermann
CASTI J.	Reality rules tome I	Wiley
CASTI J.	Reality rules tome II	Wiley
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	Prentice Hall
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe tome I	MIR
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle	Editions de l'X
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	Masson
CHARPENTIER E.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 1	Cassini
CHARPENTIER E.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 2	Cassini
CHARPENTIER E.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 3	Cassini
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	Masson
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	Springer Verlag
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	Hermann
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	Algèbre 1	Ellipses

CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	Algèbre 2	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	Masson
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1	John Wiley
COLLET P.	Modeling binary data	Chapman and Hall
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique, 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats	Dunod
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique, 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	Dunod
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	Dunod
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics, Volume 1	John Wiley
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics, Volume 2	John Wiley
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	Ediscience
COX D.	Galois theory	Wiley
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	John Wiley
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	Institute of Physics, Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	Exercices de Probabilités et Statistiques, 1. Problèmes à temps fixe	Masson

DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	Probabilités et Statistiques, 1. Problèmes à temps fixe	MASSON
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	MASSON
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique	ELLIPSES
DANTZER J.-F.	Mathématiques pour l'agrégation interne, Analyse et probabilités. Cours et exercices corrigés	VUIBERT
DARTE A. **VAUDENAY S.**	Algorithmique et optimisation	DUNOD
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique, Théorie de la démonstration	DUNOD
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	QUE-SAIS-JE ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	SPRINGER
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	DUNOD
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	JACQUES GABAY
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU GRENOBLE
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	ELLIPSES
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	CASSINI
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	SPRINGER
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN** **RUAUD** **MIQUEL** **SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés, 1ère année MPSI, PCSI, PTSI	DUNOD

DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN** **RUAUD** **MIQUEL** **SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés, 2ème année MP, PC, PSI	DUNOD
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	ELLIPSES
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse., Éléments d'Analyse Tome 2.	GAUTHIER-VILLARS
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse., Fondements de l'analyse moderne	GAUTHIER-VILLARS
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	HERMANN
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle, Deuxième année	GAUTHIER-VILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle, Première année	GAUTHIER-VILLARS
DOWEK **G.** **LEVY J.-J.**	Introduction à la théorie des langages de programmation	EDITIONS DE L'X
DUBERTRET G.	Initiation à la cryptographie	VUIBERT
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les Mathématiques, plaisir et nécessité, Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques	VUIBERT
DUGAC P.	Histoire de l'analyse., Autour de la notion de limite et de ses voisinages	VUIBERT
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fourier series and integrals	ACADEMICS PRESS

EBBINGHAUS HERMES HIRZEBRUCH KOECHER LAMOTKE MAINZER NEUKIRSCH PRESTEL REMMERT	Les Nombres	VUIBERT
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier, des fonctions	DUNOD
EL KACIMI ALAOUI A. QUEFFÉLEC H. SACRÉ C. VASSALLO V.	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES
ENGEL A.	Solutions d'expert, vol. 1	CASSINI
EPISTEMON L. (OVAERT J.L. VERLEY J.L.)	Exercices et problèmes, Algèbre.	CÉDIC/NATHAN
EPISTEMON L. (OVAERT J.L. VERLEY J.L.)	Exercices et problèmes, Analyse. Volume 1	CÉDIC/NATHAN
EXBRAYAT J.M. MAZET P.	Notions modernes de mathématiques, Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles	HATIER
EXBRAYAT J.M. MAZET P.	Notions modernes de mathématiques, Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse	HATIER
EXBRAYAT J.M. MAZET P.	Notions modernes de mathématiques, Analyse 2 : Éléments de topologie générale	HATIER
FADDEEV D. SOMINSKI I.	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. BEEF C.	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	ELLIPSES
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	CALVAGE ET MOUNET
FARAUT J. KHALILI E.	Arithmétique, Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	ELLIPSES
FELLER W.	An introduction to Probability theory & its application	WILEY

FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	Masson
FLORY G.	Topologie, analyse – exercices tome 1	Vuibert
FLORY G.	Topologie, analyse – exercices tome 2	Vuibert
FLORY G.	Topologie, analyse – exercices tome 3	Vuibert
FLORY G.	Topologie, analyse – exercices tome 4	Vuibert
FONTANEZ C. **RANDE B.**	Les clés pour les Mines	Calvage et Mounet
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales, Algèbre	Ellipses
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales, Analyse 1	Ellipses
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales, Analyse 2	Ellipses
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	Masson
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 1	Cassini
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	Hermann
FRESNEL J.	Anneaux	Hermann
FRESNEL J.	Géométrie	IREM de Bordeaux
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR Maths Bordeaux
FRESNEL J.	Groupes	Hermann
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	Hermann
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	Springer
FULTON W.	Algebraic Topology	Springer
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	Cassini
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices, Tome 1	Dunod

GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices, Tome 2	DUNOD
GAREY M.	Computers and Intractability	FREEMAN AND CO
GARLING D.J.H.	Inequalities	CAMBRIDGE
GATHEN J.	Modern Computer algebra	CAMBRIDGE
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER
GOBLOT R.	Algèbre commutative	MASSON
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	MASSON
GODEMENT R.	Analyse, Tome 1	SPRINGER
GODEMENT R.	Analyse, Tome 2	SPRINGER
GODEMENT R.	Analyse, Tome 3	SPRINGER
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	HERMANN
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	WILEY
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation, Calcul différentiel	ELLIPSES
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation, Topologie et Analyse fonctionnelle	ELLIPSES
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 1 - Algèbre	PUF
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 2 - Topologie et analyse réelle	PUF
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel	PUF
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 4 - Géométrie affine et métrique	PUF
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M', Algèbre	ELLIPSES

GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M', Analyse	Ellipses
GRAHAM **KNUTH**	Concrete mathematics	Addison Wesley
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	Hermann
GRAMAIN A.	Intégration	Hermann
GRANJON Y.	Informatique, Algorithmes en Pascal et en langage C	Dunod
GRENIER J.-P.	Débuter en Algorithmique avec Matlab et Scilab	Ellipses
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	Oxford
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	Wiley
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	Cambridge
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	Ellipses
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	Cassini
HAMMAD P.	Cours de probabilités	Cujas
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	Cujas
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	Springer
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	Oxford
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do	Oxford
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	Addison Wesley
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis, Volume 1	Wiley-Interscience
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis, Volume 2	Wiley-Interscience

HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis, Volume 3	Wiley-Interscience
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HINDRY M.	Arithmétique	Calvage et Mounet
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Éléments d'analyse fonctionnelle	Masson
HOCHARD M.	Algèbre, analyse, géométrie	Vuibert
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	Addison Wesley
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	Belin
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	Springer Verlag
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra, Tome I	Freeman and Co
JACOBSON N.	Basic Algebra, Tome II	Freeman and Co
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	Dover
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	Hermann
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C	Dunod
KNUTH D.E.	The art of computer programming, Volume 1 : Fundamental algorithms	Addison-Wesley
KNUTH D.E.	The art of computer programming, Volume 2 : Seminumerical algorithms	Addison-Wesley
KNUTH D.E.	The art of computer programming, Volume 3 : Sorting and Searching	Addison-Wesley
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	Ellipses

KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	Cambridge
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	Cambridge
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	Dunod
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	Casssini
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	Cassini
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KUNG J.	Combinatorics	Cambridge
LACOMME P. **PRINS C.** **SEVAUX M.**	Algorithmes de graphes	Eyrolles
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	Masson
LANG S.	Algebra	Addison-Wesley
LANG S.	Algèbre linéaire, Tome 1	InterEditions
LANG S.	Algèbre linéaire, Tome 2	InterEditions
LANG S.	Linear Algebra	Addison-Wesley
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	Ellipses
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
LAX P. D.	Linear Algebra	Wiley
LAX P. D.	Functional analysis	Wiley
LE BRIS G.	Maple Sugar : Initiation progressive à Maple	Cassini
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	Jacques Gabay

LEHMANN D. **SACRE C.**	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 1 : Topologie	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 3 : Intégration et sommation	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 4 : Analyse en dimension finie	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 5 : Analyse fonctionnelle	Masson
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 2 : Dérivation	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 1 - Algèbre 1	Ellipses
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 2 - Algèbre et géométrie	Ellipses
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 3 - Analyse 1	Ellipses
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 4 - Analyse 2	Ellipses
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques, Tome 1 pour A-A' : Algèbre	Dunod
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques, Tome 1 pour M-M' : Algèbre	Dunod
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques, Tome 2 : Analyse	Dunod
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques, Tome 3 : Géométrie et cinématique	Dunod
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques, Tome 4 : Équations différentielles, intégrales multiples	Dunod

LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	Armand Colin
LION G.	Algèbre pour la licence, Cours et exercices (2ème édition)	Vuibert
LION G.	Géométrie du plan, Cours complet avec 600 exercices résolus	Vuibert
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	Cambridge
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre, 1 : Structures fondamentales	Gauthier-Villars
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre, 2 : Les grands théorèmes	Gauthier-Villars
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	Springer
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	Masson
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	Hermann
Manuels Matlab	Using Matlab version 5	Matlab
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	Ellipses
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle, Tome 2 : Exercices et corrigés	PUF
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle, Tome 3 : Exercices et corrigés	PUF
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle, Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	Springer
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	Dunod

MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction., École Polytechnique	ELLIPSES
MEUNIER	Agrégation interne de Mathématiques, Exercices d'oral corrigés et commentés, Tome 2	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	CAMBRIDGE
MNEIMNÉ R.	Éléments de géométrie : action de groupes	CASSINI
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	CALVAGE ET MOUNET
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	HERMANN
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales, Analyse : topologie et séries	ELLIPSES
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales, Analyse : suites et séries de fonctions	ELLIPSES
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI	DUNOD
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT	DUNOD
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI	DUNOD
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI	DUNOD
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 3 MP, PSI, PC, PT	DUNOD
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 4 MP, PSI, PC, PT	DUNOD
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Exercice d'algèbre et géométrie MP	DUNOD
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Exercices d'analyse MP	DUNOD

MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Exercices d'analyse MPSI	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique, Tome 1	VUIBERT
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique, Tome 2	VUIBERT
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	SEUIL
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry	PRENTICE HALL
OUVRARD J.Y.	Probabilités 1 (capes, agrégation)	CASSINI
OUVRARD J.Y.	Probabilités 2 (maitrise, agrégation)	CASSINI
PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard, les probabilités de tous les jours	VUIBERT
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER
PEDOE D.	Geometry - A comprehensive course	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	SPRINGER
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis, Volume I	SPRINGER VERLAG

PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis, Volume II	Springer Verlag
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	Ellipses
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	Dunod
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first course in numerical analysis	International Student Edition
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 1- Algèbre	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 2- Algèbre et applications à la géométrie	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 3- Topologie et éléments d'analyse	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 4- Séries et équations différentielles	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 5- Applications de l'analyse à la géométrie	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions, Algèbre	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions, Analyse 1	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions, Analyse 2	Masson
RAMIS J.- P. **WARUSFEL A.** **BUFF X.** **ARNIER J.** **HALBERSTADT E.** **LACHAND-ROBERT T.** **MOULIN F.** **SAULOY J.**	Mathématiques Tout-en-un pour la licence, Cours complet avec 270 exercices corrigés, niveau L1	Dunod
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	Wiley

REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	Livre de Poche
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	Hermann
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	Springer
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	Vuibert
ROLLAND R.	Théorie des séries, 2- Séries entières	Cédic/Nathan
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP Sciences
ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation, Analyse pour l'agrégation	Vuibert
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP Sciences
ROUX C.	Initiation à la théorie des graphes	Ellipses
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	Masson
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	Masson
RUDIN W.	Functional analysis	Mc Graw Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis	Mc Graw Hill
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	Hermann
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	Ellipses
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	Springer
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	Ellipses
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	Vuibert

SCHWARTZ L.	Analyse, I Topologie générale et analyse fonctionnelle	Hermann
SCHWARTZ L.	Analyse, II Calcul différentiel et équations différentielles	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	Pearson Education
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	Dunod
SEDGEWICK R.	Algorithms	Addison Wesley
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	Springer
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	Analyse 3	Ellipses
SERVIEN Cl.	Analyse 4	Ellipses
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	Dunod
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	Thomson C.T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	Dunod
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	Waddworth and Brooks
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	Cassini
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	Dunod
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 2	Masson
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	Masson
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Institut Elie Cartan
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S.M.F.
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF

TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S.M.F.
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	Masson
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	Vuibert
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM des Pays de Loire
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	Seuil
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique, I Théorie des fonctions	Masson
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique, II Équations fonctionnelles - Applications	Masson
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	Hermann
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	Masson
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes, Équations différentielles	Hermann
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	Ellipses
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	Classiques Hachette
WARUSFEL **ATTALI** **COLLET** **GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques, Analyse	Vuibert
WARUSFEL **ATTALI** **COLLET** **GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques, Arithmétique	Vuibert

WARUSFEL **ATTALI** **COLLET** **GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques, Géométrie	VUIBERT
WARUSFEL **ATTALI** **COLLET** **GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques, Probabilités	VUIBERT
WEST D. B.	Introduction to graph theory	PRENTICE HALL
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology	ACADEMIC PRESS
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire	CASSINI
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages	MIT PRESS
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	DOVER
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	DOVER
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	CASSINI
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON