ministère Éducation nationale

EAI MAT 2

SESSION 2013

# AGRÉGATION
# CONCOURS INTERNE
# ET CAER

## Section : MATHÉMATIQUES

### DEUXIÈME ÉPREUVE

Durée : 6 heures

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB :** ***La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

**Tournez la page S.V.P.**

## Préliminaire et notations

Voici un rappel de quelques notations classiques :

- ▷ $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
- ▷ $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- ▷ $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
- ▷ $\mathbf{C}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$.
- ▷ $\mathbf{C}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de $\mathbf{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n$, où $n \in \mathbf{N}$.
- ▷ Si $P \in \mathbf{C}[X]$ et $n \in \mathbf{N}$, on note $P^{(n)}$ la dérivée $n$-ième de $P$.
- ▷ $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbf{C}$. On note $I_n$ son élément unité.

On considère une algèbre unitaire $\mathcal{A}$ de dimension finie sur le corps $\mathbf{C}$, dont on note $1_{\mathcal{A}}$ l'élément unité.

Une norme $\|\,.\,\|$ sur $\mathcal{A}$ est dite **norme d'algèbre** si :

(*i*) $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$

(*ii*) $(\forall\, (a,b) \in \mathcal{A}^2), \quad \|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$

En particulier, dans ce cas, on a :

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}), (\forall\, a \in \mathcal{A}), \quad \|a^n\| \leqslant \|a\|^n .$$

On **rappelle** que, dans une algèbre normée de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente.

Si $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}} b_n$ sont des séries absolument convergentes à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{A}$, alors leur produit de Cauchy est la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n$ avec

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} .$$

Cette série converge absolument et vérifie :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n .$$

On définit enfin la fonction exponentielle

$$\exp : a \mapsto 1_{\mathcal{A}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} .$$

L'objet du problème est d'étudier dans certaines algèbres normées $(\mathcal{A}, \|\,.\,\|)$ particulières la surjectivité de l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ a \in \mathcal{A} & \longmapsto & a \exp a \end{cases} .$$

# Partie I : Premiers résultats

## A) Norme d'algèbre sur une C-algèbre de dimension finie

On considère une algèbre unitaire $\mathcal{A}$ de dimension finie sur le corps $\mathbf{C}$. On se donne une norme quelconque, notée $\|\,.\,\|$, sur $\mathcal{A}$. On se propose de vérifier l'existence d'une norme d'algèbre $N$ sur $\mathcal{A}$.

**1.** On définit pour $a \in \mathcal{A}$ l'application

$$\sigma_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \right.$$

Démontrer que $\sigma_a$ est un endomorphisme de $\mathcal{A}$.

**2.** Justifier le fait que $\sigma_a$ est continue sur $(\mathcal{A}, \|\,.\,\|)$.

**3.** On se donne $a \in \mathcal{A}$. Démontrer que $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|\sigma_a(x)\|$ est un réel bien défini, qui sera noté $N(a)$.

**4.** **(a)** Démontrer que l'application

$$N : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ a & \longmapsto & N(a) \end{array}$$

définit une norme sur $\mathcal{A}$.

**(b)** Démontrer que $N$ est bien une norme d'algèbre sur $\mathcal{A}$.

## B) Deux identités préliminaires

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$.

**5.** **(a)** Vérifier que $x \mapsto (1 - e^x)^n$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et, par exemple à l'aide d'arguments de développement limité, vérifier que sa dérivée $n-1$-ième en 0 est nulle.

**(b)** Démontrer la relation

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} p^{n-1} = 0\,. \tag{1}$$

**6.** On se donne $u \in \mathbf{C}$ et on pose

$$P_0(X) = 1, \quad P_j(X) = X(X - ju)^{j-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n\,.$$

**(a)** Démontrer que $\mathcal{B} = (P_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

**(b)** Démontrer que :

$$(\forall\, P \in \mathbf{C}_n[X]),\ P(X) = P(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{X(X - ku)^{k-1}}{k!} P^{(k)}(ku)\,.$$

Indication : on pourra se servir de la base précédente.

**(c)** En déduire l'identité :

$$(X + n + 1)^n = (n+1)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X(X+k)^{k-1}(n+1-k)^{n-k}\,. \tag{2}$$

## Partie II : La fonction $a \mapsto a \exp a$

On considère une algèbre de dimension finie $(\mathcal{A}, \|\,.\,\|)$, où $\|\,.\,\|$ est une norme d'algèbre. On **admettra** la propriété suivante :

Si $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$, est une suite double d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)$ est fini, alors les trois expressions

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}u_{p,q}\right),\ \sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)\quad\text{et}\quad\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n}u_{p,q}\right)$$

ont un sens et sont égales.

**7.** Justifier le fait que la fonction $\exp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est bien définie et est continue sur $\mathcal{A}$.

**8.** On considère des éléments $a$ et $b$ de $\mathcal{A}$ qui commutent, c'est-à-dire tels que $ab = ba$.

**(a)** On introduit la suite double : $(\forall\,(p,q)\in\mathbf{N}^2)$, $\quad u_{p,q} = \dfrac{a^p b^q}{p!q!}$.
Démontrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\|u_{p,q}\|\right)$ est fini.

**(b)** En déduire à l'aide du résultat admis en début de cette section la relation

$$\exp(a+b) = \exp a \exp b\,.$$

On définit l'application $\Phi : \left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}\\ a & \longmapsto & a\exp a\end{array}\right.$.

**9.** **(a)** On note $e$ le nombre réel $\exp(1)$. Étudier les variations sur $\mathbf{R}$ de $\eta : x \mapsto x\exp x$ et en déduire que dans $]0,+\infty[$, l'équation $\eta(x) = 1/e$ admet une unique solution. Celle-ci sera notée $\tau$.

**(b)** Démontrer que la série entière complexe

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}}{n!}z^n$$

a pour rayon de convergence $1/e$.
On notera $W$ sa somme sur son disque ouvert de convergence.

**10.** Démontrer que, pour tout $a\in\mathcal{A}$ tel que $\|a\| < 1/e$,

$$\omega(a) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}}{n!}a^n$$

est bien définie. Il en résulte que $\omega : a \mapsto \omega(a)$ réalise une application de $\Omega = \{a\in\mathcal{A}\,;\|a\| < 1/e\}$ dans $\mathcal{A}$.

On se propose de montrer dans toute la suite de cette section, que l'on a autour de l'origine dans $\mathcal{A}$ la relation :

$$\omega(\Phi(a)) = \Phi(\omega(a)) = a\,.$$

**11.** On considère un élément $a\in\mathcal{A}$ tel que $\|a\| < \tau$. On introduit les suites doubles

$$(\forall\,p\in\mathbf{N}^*),(\forall\,q\in\mathbf{N}),\quad s_{p,q} = (-1)^{p-1}\frac{p^{p+q-1}a^{p+q}}{p!q!}\quad\text{et}\quad v_{p,q} = \frac{p^{p+q-1}\|a\|^{p+q}}{p!q!}.$$

**(a)** Démontrer l'inégalité $\|a\| \exp \|a\| < 1/e$ et établir les relations

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} v_{p,q}\right) = -W(-\|a\| \exp \|a\|) \qquad \text{puis} \qquad \omega(\Phi(a)) = \sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} s_{p,q}\right).$$

**(b)** En déduire à l'aide des propriétés admises sur les suites doubles et de l'identité vue en **I-B-5b** que pour tout élément $a$ de $\mathcal{A}$ tel que $\|a\| < \tau$ on a $\omega(\Phi(a)) = a$.

On considère jusqu'à la fin de cette partie un élément $a \in \mathcal{A}$ tel que $\|a\| < 1/e$.

**12.** **(a)** Démontrer l'existence de $\rho > 1$ tel que la fonction

$$\varphi : t \mapsto \omega(ta) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}}{n!}t^n a^n$$

soit bien définie sur $]-\rho, \rho[$.

**(b)** Démontrer que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\rho, \rho[$ avec :

$$(\forall\, t \in ]-\rho, \rho[), \quad \varphi'(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^n}{n!}t^n a^{n+1}$$

**(c)** Justifier le fait que $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$ commutent pour tout $t \in ]-\rho, \rho[$.

**(d)** Démontrer que $t \mapsto \exp(\varphi(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\rho, \rho[$ avec :

$$(\forall\, t \in ]-\rho, \rho[), \quad \big(\exp(\varphi(t))\big)' = \varphi'(t)\exp(\varphi(t)) = \exp(\varphi(t))\varphi'(t).$$

**13.** On se propose d'établir la relation :

$$(\forall\, t \in [0, \rho[), \quad t\varphi'(t)(1 + \varphi(t)) = \varphi(t).$$

**(a)** Établir la relation :

$$(\forall\, t \in ]0, \rho[), \quad \frac{\varphi(t)}{t} - \varphi'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)^{n-1}}{n!}t^n a^{n+1}.$$

**(b)** Montrer à l'aide d'un produit de Cauchy que :

$$(\forall\, t \in ]0, \rho[), \quad \varphi(t)\varphi'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n a^{n+1}, \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k+1)^{n-k}.$$

**(c)** Établir à l'aide de l'identité vue en **I-B-6c** l'égalité :

$$(\forall\, t \in ]0, \rho[), \quad \frac{\varphi(t)}{t} - \varphi'(t) = \varphi(t)\varphi'(t),$$

puis la relation annoncée.

**14.** **(a)** Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\varphi(t)\exp(\varphi(t))}{t}$ est constante sur $]0, \rho[$, puis que :

$$(\forall\, t \in [0, \rho[), \quad \varphi(t)\exp(\varphi(t)) = ta.$$

**(b)** En déduire que l'on a $\Phi(\omega(a)) = a$.

## Partie III : Le cas $\mathcal{A} = \mathbf{C}$

On se propose d'établir la surjectivité de l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & ze^z \end{array}$$

On **admettra** la propriété suivante :

> Soit $\sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence infini, de somme $\Lambda$.
> On suppose que $\Lambda$ ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$. Alors il existe une série entière complexe $\sum_{n\in\mathbf{N}} \rho_n z^n$ de rayon de convergence infini, de somme $\Theta$ telle que :
>
> $$(\forall\, z \in \mathbf{C}), \quad e^{\Theta(z)} = \Lambda(z).$$

On considère une série entière complexe $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence infini, de somme $F$.
On note $G$ la partie réelle de $F$, ce qui revient à poser : $(\forall\, z \in \mathbf{C}), \quad G(z) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n z^n + \overline{a_n}\,\overline{z}^n)$.

**15.** **(a)** Démontrer la relation :

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}^*), (\forall\, R > 0), \quad a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} G(Re^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

Indication : On pourra effectuer une intégration terme à terme après l'avoir justifiée.

**(b)** Calculer, pour tout $R > 0$, l'intégrale $I(R) = \int_0^{2\pi} G(Re^{it})\,\mathrm{d}t$ en fonction de $a_0$.

**16.** On suppose qu'il existe deux nombres réels $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 0$ tels que :

$$(\forall\, z \in \mathbf{C}), \quad G(z) \leqslant p|z| + q.$$

**(a)** Démontrer que

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}^*), (\forall\, R > 0), \quad |a_n| \leqslant \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\left(pR + q - G(Re^{it})\right)\mathrm{d}t.$$

**(b)** En déduire que $F$ est un polynôme de degré $\leqslant 1$.

Dans la suite de cette partie, on va démontrer par l'absurde que $\Phi$ est surjective.
On suppose donc l'existence de $\beta \in \mathbf{C}$ tel que : $(\forall\, z \in \mathbf{C}), \quad \Phi(z) \neq \beta$.

**17.** Démontrer l'existence d'une série entière complexe $\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n z^n$, de rayon de convergence infini, telle que :

$$(\forall\, z \in \mathbf{C}), \quad e^{\Psi(z)} = \Phi(z) - \beta = ze^z - \beta.$$

On note $G_\Psi$ la partie réelle de $\Psi$.

**18.** Démontrer l'existence de $p_0 \geqslant 0$ et $q_0 \geqslant 0$ tels que : $(\forall\, z \in \mathbf{C}), \quad G_\Psi(z) \leqslant p_0|z| + q_0$.

**19.** En déduire une contradiction et conclure.

**20.** Établir que $-1/e$ admet une infinité d'antécédents dans $\mathbf{C}$ par $\Phi$.
Indication : on pourra exprimer $z$ tel que $\Phi(z) = -1/e$ sous la forme $z = x + iy$.

## Partie IV : Le cas $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

On se fixe un entier naturel $n \geqslant 1$. On suppose que l'algèbre $\mathcal{A}$ est $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, munie d'une norme d'algèbre.
On se propose d'établir la surjectivité de l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ A & \longmapsto & A\exp(A) \end{array}$$

On rappelle et on **admettra** le résultat suivant :

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ sont les $s \geqslant 1$ valeurs propres complexes distinctes de $M$, d'ordre de multiplicité $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$, alors $M$ est semblable à la matrice diagonale par blocs de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ :

$$\operatorname{diag}(M_1, \cdots, M_s) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_s \end{pmatrix},$$

avec $M_k = \lambda_k I_{\alpha_k} + N_k \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbf{C})$ où $N_k \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbf{C})$ est nilpotente, pour tout $1 \leqslant k \leqslant s$.

**21.** On considère un polynôme $P \in \mathbf{C}_n[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
On introduit l'application

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}[X] \\ T & \longmapsto & \Delta(T) \end{array}$$

où $\Delta(T)$ est le reste de la division euclidienne de $T(P(X))$ par $X^{n+1}$.

**(a)** Démontrer que $\Delta$ est un endomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$.

**(b)** Démontrer que $\Delta$ est un automorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$.

**(c)** En déduire l'existence de $Q \in \mathbf{C}_n[X]$ tel que $Q(0) = 0, Q'(0) \neq 0$ et de $S \in \mathbf{C}[X]$ tel que

$$Q(P(X)) = X + X^{n+1}S(X).$$

**(d)** Que peut-on dire de $P(Q(X))$ ?

**22.** Soit $\lambda$ un nombre complexe différent de $-1/e$ et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente (autrement dit, $U^n = 0$).

Soit $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $\mu e^\mu = \lambda$. Soit $P \in \mathbf{C}_n[X]$ le polynôme donné par : $P(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^\mu(\mu + k)}{k!} X^k$.

Vérifier que l'on peut associer à $P$ un polynôme $Q$ comme à la question **21** et que

$$\Phi(\mu I_n + Q(U)) = \lambda I_n + U.$$

**23.** Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\Phi(A) = -(1/e)I_n + U.$$

**24.** Montrer que $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est surjective.

FIN DU SUJET