

AGRÉGATION INTERNE

DE MATHÉMATIQUES

Session 2011, épreuve 1

NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

Soit un entier $n \geq 1$. On appelle **graphe** à n sommets tout couple $G = (\llbracket 1, n \rrbracket, A)$, où $\llbracket 1, n \rrbracket$ est l'ensemble des entiers compris entre 1 et n et A est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}_2(n)$ des parties à 2 éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ($\mathcal{P}_2(n)$ est l'ensemble des paires d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$).

- Les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont appelés **sommets** du graphe G et les éléments de A sont appelés **arêtes** de G .
- Deux sommets **distincts** i et j sont dits **voisins** dans G lorsque $\{i, j\}$ est une arête du graphe. On note alors $i \sim j$ (rappel : en ce cas i et j sont distincts et on a aussi $j \sim i$). Pour tout sommet $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle **degré** de i et on note $d_i \in \mathbf{N}$ le nombre de voisins de i . Nous supposons que $d_i \geq 1$ pour tout sommet i de G , c'est-à-dire que le graphe n'a aucun sommet isolé.
- On note \mathbf{R}^n le **R-espace** vectoriel des vecteurs-colonne à coefficients réels. Pour tout $y \in \mathbf{R}^n$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $y(i)$ sa i -ème composante. On munit \mathbf{R}^n de son produit scalaire canonique défini par

$$\forall y, z \in \mathbf{R}^n, \quad \langle y, z \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(n) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(1) \\ \vdots \\ z(n) \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n y(i)z(i).$$

ainsi que de la norme euclidienne associée $\|y\|^2 = \langle y, y \rangle$.

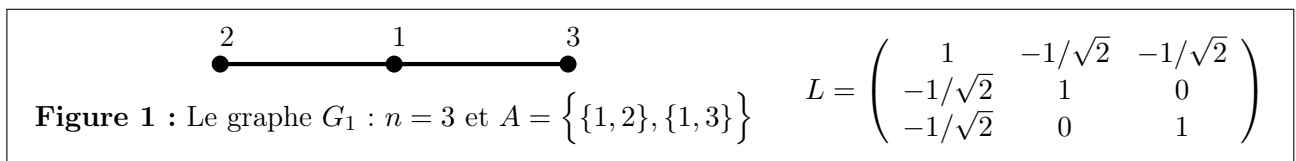
Enfin, (e_1, \dots, e_n) désigne la base canonique de \mathbf{R}^n .

- Le **Laplacien** \mathcal{L} de G est l'endomorphisme de \mathbf{R}^n dont la matrice $L = (L_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ (matrice laplacienne) dans la base canonique (e_1, \dots, e_n) vérifie

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ -\frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}, & \text{si } i \sim j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On notera indifféremment $\mathcal{L}(x)$ ou $\mathcal{L}x$ pour tout vecteur $x \in \mathbf{R}^n$.

À titre d'exemple, on montre ci-dessous un graphe et sa matrice laplacienne associée.



Dans le cas général, la matrice L étant symétrique réelle, il existe une base orthonormale de \mathbf{R}^n formée de vecteurs propres de \mathcal{L} . Nous noterons $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses n valeurs propres, éventuellement comptées avec leurs ordres de multiplicité dans le polynôme caractéristique de L , et $\text{Sp}(\mathcal{L})$ l'ensemble de ces valeurs propres (il possède entre 1 et n éléments). On notera que L n'est pas diagonale puisqu'aucun sommet n'est isolé.

L'objectif de ce problème est de mettre en évidence certaines informations combinatoires contenues dans les valeurs propres de \mathcal{L} .

Dans la partie A, on calcule le spectre sur trois exemples.

Dans la partie B, on étudie le lien avec la connexité et on établit le principe du minimax.

Dans la partie C, on étudie les valeurs maximales que peuvent prendre λ_2 et λ_n .

Dans la partie D, on donne des bornes pour le nombre chromatique.

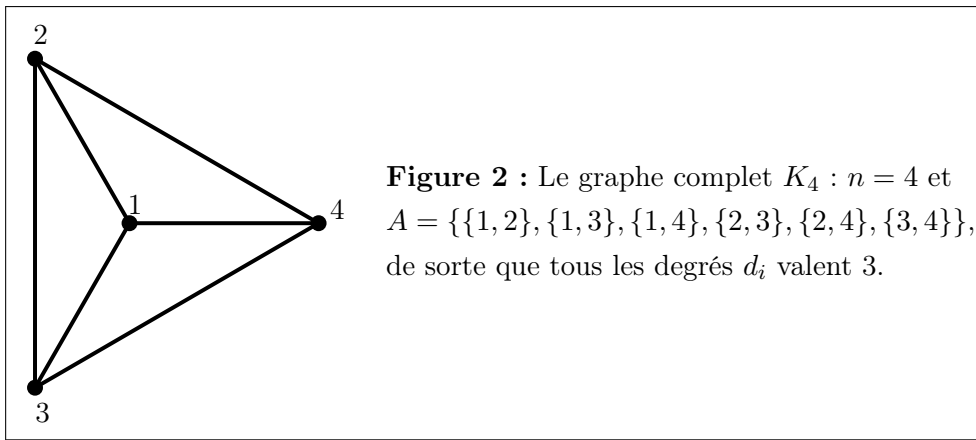
Partie A : exemples

A-1. Exemple 1 : un graphe linéaire.

Déterminer les valeurs propres et une base orthonormale de vecteurs propres pour la matrice L correspondant au graphe G_1 défini dans le préliminaire (on pourra chercher les valeurs propres et une base orthonormale de vecteurs propres de $L - I_3$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3).

A-2. Exemple 2 : le graphe complet.

Soit un entier $n \geq 2$. On note K_n le graphe $(\llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{P}_2(n))$, ce qui revient à considérer que chacun des n sommets de K_n est voisin de tous les autres sommets.



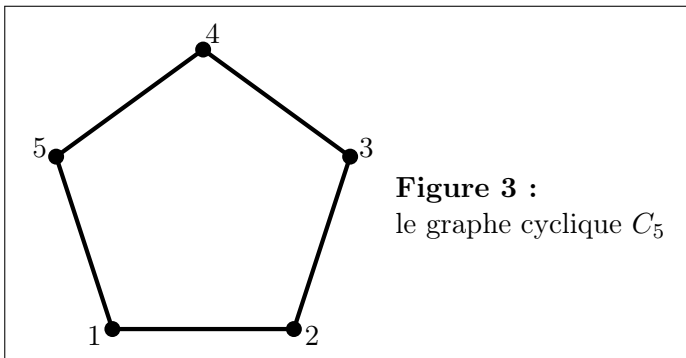
a) Écrire la matrice L du graphe K_n comme combinaison linéaire de la matrice identité I_n d'ordre n et de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

b) Donner les valeurs propres du laplacien \mathcal{L} de K_n , en explicitant leurs ordres de multiplicité.

A-3. Exemple 3 : le graphe cyclique à n sommets.

Soit un entier $n \geq 3$. On note C_n le graphe $(\llbracket 1, n \rrbracket, A)$ tel que $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ (tous les sommets sont alors de degré 2).



Dans le cas général, on admettra que la matrice laplacienne de C_n a l'allure suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}).$$

Calculer C^n et en déduire le spectre et les sous-espaces propres complexes de C .

b) Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \text{ définie par : } \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,j} = a_k \text{ où } k = (i - j) \bmod n.$$

Soit le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On note $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$.

Démontrer que M est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} P(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\omega) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$.

c) Démontrer que

- si n est pair, les valeurs propres du laplacien \mathcal{L} de C_n sont les nombres réels de la forme $2 \sin^2 \frac{k\pi}{n}$, où $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$;
- si n est impair, les valeurs propres de \mathcal{L} sont les nombres de la forme $2 \sin^2 \frac{k\pi}{n}$, où $0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$.

Préciser, dans chaque cas, l'ordre de multiplicité de chacune de ces valeurs propres.

Partie B : quelques généralités

Soit $n \geq 2$ et $G = (\llbracket 1, n \rrbracket, A)$ un graphe à n sommets.

Soit m le nombre d'arêtes de G et $A = \{a_1, \dots, a_m\}$.

On note $D = \sum_{i=1}^n d_i$, et ϕ_1 le vecteur de \mathbf{R}^n qui vérifie, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\phi_1(k) = \frac{\sqrt{d_k}}{\sqrt{D}}$.

B-1.

a) Démontrer, pour tout vecteur $x \in \mathbf{R}^n$, les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}x, x \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \sim i} \left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}} \right)^2 \\ \langle \mathcal{L}x, x \rangle &= \sum_{\substack{a \in A \\ a = \{i, j\}}} \left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}} \right)^2 \end{aligned}$$

b) Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$ on a

$$\langle \mathcal{L}x, y \rangle^2 \leq \langle \mathcal{L}x, x \rangle \cdot \langle \mathcal{L}y, y \rangle$$

c) En déduire que les valeurs propres de \mathcal{L} sont positives ou nulles, que le noyau de \mathcal{L} contient le vecteur ϕ_1 , et que λ_1 est nulle.

B-2.

- Soient i et j deux sommets de G et $p \geq 2$ un entier. Un **chemin** de longueur p reliant i et j est une suite de sommets $(s_1, s_2, \dots, s_{p+1})$ telle que $s_1 = i$, $s_{p+1} = j$, et pour tout entier $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\{s_k, s_{k+1}\} \in A$.
 - On admettra que pour tout graphe $G = (\llbracket 1, n \rrbracket, A)$, l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ des sommets peut être partitionné en un certain nombre de sous-ensembles J_1, \dots, J_r , appelés **composantes connexes** du graphe et vérifiant :
 - pour tout k de $\llbracket 1, r \rrbracket$, deux éléments quelconques de J_k peuvent être reliés par un chemin,
 - pour tous k, l distincts de $\llbracket 1, r \rrbracket$, aucun élément de J_k ne peut être relié à un élément de J_l .
 - G est dit **connexe** lorsque $r = 1$, c'est-à-dire lorsque G possède une seule composante connexe.
- Le but de cette question est de démontrer l'équivalence suivante :

$$(\#) \quad G \text{ est connexe} \iff \lambda_2 > 0.$$

- a) Donner r et J_1, \dots, J_r pour le graphe suivant : $G = (\llbracket 1, 7 \rrbracket, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\})$.
- b) On revient au cas général. Démontrer que λ_2 est strictement positive si, et seulement si, $\ker \mathcal{L}$ est la droite engendrée par ϕ_1 (on pourra considérer l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_1).
- c) Soit un vecteur x appartenant à $\ker \mathcal{L}$.

Démontrer que pour tous sommets i, j reliés par un chemin on a $\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} = \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}$.

- d) Démontrer le sens direct de l'équivalence $(\#)$.
- e) Démontrer que si G n'est pas connexe, on peut construire deux vecteurs de $\ker \mathcal{L}$ non colinéaires, et conclure.

B-3. Soit (ϕ_1, \dots, ϕ_n) une base orthonormale de \mathbf{R}^n (ϕ_1 étant le vecteur défini au préambule du **B**), et telle que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{L}\phi_i = \lambda_i\phi_i$.

a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ non nul,
$$\frac{\langle \mathcal{L}x, x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \phi_i, x \rangle^2}{\sum_{i=1}^n \langle \phi_i, x \rangle^2}.$$

b) Démontrer que
$$\begin{cases} \lambda_n &= \max \left\{ \frac{\langle \mathcal{L}x, x \rangle}{\|x\|^2} ; x \in \mathbf{R}^n, \text{ et } x \neq 0 \right\}, \\ \lambda_2 &= \min \left\{ \frac{\langle \mathcal{L}x, x \rangle}{\|x\|^2} ; x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0 \text{ et } \langle x, \phi_1 \rangle = 0 \right\}. \end{cases}$$

Ces deux égalités seront appelées **principe du minimax** et serviront plusieurs fois par la suite.

Partie C : étude des bornes des valeurs propres

Soit $n \geq 2$. Dans toute cette partie, $G = (\llbracket 1, n \rrbracket, A)$ désigne un graphe à n sommets.

C-1. En utilisant la trace de \mathcal{L} , montrer que $\lambda_2 \leq \frac{n}{n-1}$.

C-2. Caractérisation du cas où λ_2 est maximale.

a) Soient i et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ deux sommets distincts de G , non voisins ($\{i, j\}$ n'est donc pas dans A). Soit $\phi \in \mathbf{R}^n$ le vecteur tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \phi(k) = \begin{cases} \sqrt{d_j}, & \text{si } k = i, \\ -\sqrt{d_i}, & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que pour toute arête $\{k, l\} \in A$,

$$\left(\frac{\phi(k)}{\sqrt{d_k}} - \frac{\phi(l)}{\sqrt{d_l}} \right)^2 = \begin{cases} d_j/d_i & \text{si } k = i \text{ ou } l = i \\ d_i/d_j & \text{si } k = j \text{ ou } l = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En déduire que $\langle \mathcal{L}\phi, \phi \rangle = \|\phi\|^2$.

b) Montrer que $\lambda_2 = \frac{n}{n-1}$ si et seulement si G est le graphe complet K_n .

On pourra utiliser le principe du minimax.

C-3. Caractérisation du cas où λ_n est maximale.

On suppose dans cette question que G est un graphe connexe.

a) Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Démontrer que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{x(i)^2}{d_i} + \frac{x(j)^2}{d_j} \right)$, et préciser dans quelles conditions cette inégalité devient une égalité.

b) En déduire que $\lambda_n \leq 2$.

c) On dit que G est **biparti** lorsqu'il existe deux parties S_1 et S_2 de $\llbracket 1, n \rrbracket$ non vides telles que

$$(B) \quad \begin{cases} \llbracket 1, n \rrbracket = S_1 \cup S_2, \\ S_1 \cap S_2 = \emptyset, \\ \forall \{i, j\} \in A, (i \in S_1 \Rightarrow j \in S_2) \text{ et } (i \in S_2 \Rightarrow j \in S_1). \end{cases}$$

En d'autres termes, toute arête de G joint un sommet de S_1 et un sommet de S_2 .

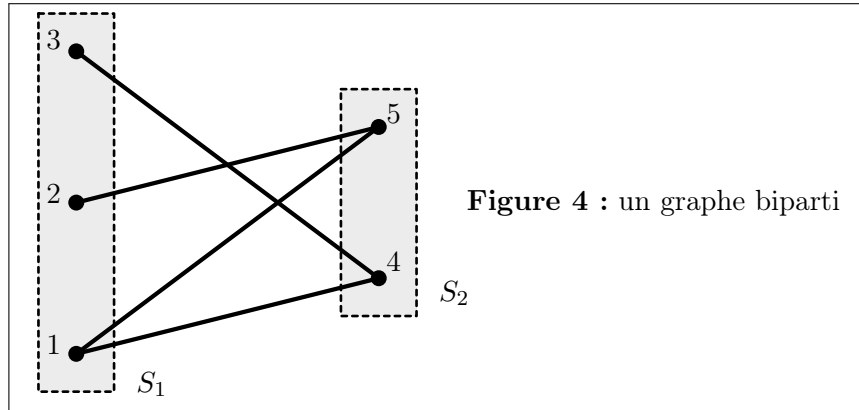


Figure 4 : un graphe biparti

On suppose que G est biparti. Démontrer que $\lambda_n = 2$.

d) On suppose que $\lambda_n = 2$. Montrer que G est biparti. On pourra considérer un vecteur x non nul tel que $\langle \mathcal{L}x, x \rangle = 2\|x\|^2$ et l'ensemble $S_1 = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket / x(i) > 0\}$.

Partie D : à propos du nombre chromatique

Soit $n \geq 2$ et $G = (\llbracket 1, n \rrbracket, A)$ un graphe à n sommets. On notera dans cette partie $D_G = \sum_{i=1}^n d_i$ où d_i est le degré du sommet i et $\lambda = \lambda_n(G)$ la plus grande valeur propre du Laplacien \mathcal{L} de G .

D-1. Soit $H = (h_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée symétrique réelle positive d'ordre n . Pour tout entier p de $\llbracket 1, n \rrbracket$ on introduit la matrice $H_p = (h_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p}$.

a) Démontrer que H_p est une matrice symétrique positive.

b) En notant respectivement α et α_p les plus grandes valeurs propres de H et H_p , montrer que $\alpha \geq \alpha_p$.

D-2. Soit ϕ un vecteur non nul de \mathbf{R}^n . On considère la matrice symétrique réelle $H = \phi \cdot {}^t\phi \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ${}^t\phi$ désignant la matrice-ligne transposée de la matrice-colonne associée à ϕ .

Démontrer que H admet pour valeurs propres 0 et $\|\phi\|^2$; préciser les ordres de multiplicité de ces deux valeurs propres.

D-3. On introduit jusqu'à la fin de l'énoncé les deux matrices $M = \left(\sqrt{d_i d_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ et $N = L - I_n + \frac{\lambda}{D_G} M$.

a) Démontrer que $M = D_G \varphi_1 \cdot {}^t\varphi_1$, où φ_1 est défini dans l'introduction de la partie **B**, et en déduire que tous les vecteurs propres de L sont aussi des vecteurs propres de M .

b) Démontrer que la plus grande valeur propre de N est $\lambda - 1$.

D-4. Soit un entier $p \geq 2$ et $\Omega = \llbracket 1, p \rrbracket$.

Nous supposons que Ω est un ensemble **indépendant** de sommets au sens où aucune arête du graphe ne relie des sommets de Ω entre eux, c'est-à-dire : $\forall \{i, j\} \in A, (i \in \Omega \Rightarrow j \notin \Omega)$.

On note aussi $D_\Omega = \sum_{i=1}^p d_i$.

a) Notons $N = \begin{pmatrix} B & C \\ {}^tC & E \end{pmatrix}$, où $B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, $E \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbf{R})$.

Démontrer que $B = \frac{\lambda}{D_G} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} \\ \sqrt{d_2} \\ \vdots \\ \sqrt{d_p} \end{pmatrix} \cdot (\sqrt{d_1} \ \sqrt{d_2} \ \dots \ \sqrt{d_p})$. En déduire les valeurs propres de B .

b) Démontrer que $\lambda - 1 \geq \lambda \frac{D_\Omega}{D_G}$.

D-5. Supposons qu'il existe un entier $r \geq 2$ et une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en r ensembles $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ indépendants, c'est-à-dire qui vérifient

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \forall \{i, j\} \in A, (i \in \Omega_k \Rightarrow j \notin \Omega_k).$$

On dit alors que G est r -**coloriable**.

En d'autres termes, on dispose d'une palette de r couleurs et on «colorie» les sommets contenus dans Ω_k avec la k -ème couleur de la palette, si bien que deux sommets voisins ne sont jamais de la même couleur.

On appelle enfin **nombre chromatique** de G et on note $\chi(G)$ le plus petit entier r pour lequel G est r -coloriable.

Démontrer que λ n'est pas égale à 1 et que $\chi(G) \geq 1 + \frac{1}{\lambda - 1}$.

D-6. Calculer $\chi(G)$ lorsque $G = K_n$ puis lorsque $G = C_n$.

Proposer une nouvelle démonstration de l'implication $(\lambda_n < 2) \Rightarrow (G \text{ n'est pas biparti})$.

————— FIN DU SUJET —————