

AGRÉGATION INTERNE

DE MATHÉMATIQUES

Session 2010, épreuve 2

## – NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES –

La lettre  $\mathbf{C}$  désigne le corps des nombres complexes ; les espaces vectoriels considérés seront toujours des espaces vectoriels sur ce corps  $\mathbf{C}$ , et les symboles  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  ont leur signification habituelle. On note  $\mathbf{N}^*$  (resp.  $\mathbf{C}^*$ ) l'ensemble des entiers  $\geq 1$  (resp. l'ensemble des complexes non-nuls).

La lettre  $\mathcal{P}$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes (« polynômes » et « fonctions polynômes » seront toujours confondus, puisqu'on travaille sur le corps  $\mathbf{C}$ , infini). La partie réelle (resp. la partie imaginaire) du nombre complexe  $z$  sera notée  $\operatorname{Re}(z)$  (resp.  $\operatorname{Im}(z)$ ) en un endroit du problème.

On rappelle que le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$  vaut 1 et  $i = j$  et 0 sinon ( $i$  et  $j$  étant deux entiers).

Enfin, pour une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $\mathcal{E}$  on note  $\overset{\circ}{A}$  l'intérieur de  $A$ .

L'objectif du problème est l'étude de l'équation de Guichard :

$$(G) \quad f(z+1) - f(z) = g(z)$$

dans un certain espace  $\mathcal{E}$  de fonctions définies sur  $\mathbf{C}$ , qui contient  $\mathcal{P}$ . Dans cette équation,  $g \in \mathcal{E}$  est la donnée,  $f \in \mathcal{E}$  l'inconnue.

La partie I étudie l'équation (G) sur  $\mathcal{P}$ , et donne une application.

La partie II définit l'espace  $\mathcal{E}$  et établit quelques-unes de ses propriétés qui seront utiles par la suite.

La partie III étudie l'équation (G) sur  $\mathcal{E}$ .

La partie IV, enfin, étudie une variante multiplicative de (G), à savoir l'équation (sur  $\mathcal{E}$ ) :

$$(H) \quad f(qz) - f(z) = g(z)$$

dans laquelle  $q$  est un nombre complexe non nul ( $q \in \mathbf{C}^*$ ). Cette partie fait intervenir des considérations « diophantiennes », en ce sens que la vitesse d'approximation d'un irrationnel par des rationnels doit être prise en compte.

### – Partie I : L'équation (G) sur $\mathcal{P}$ et les opérateurs nilpotents –

Soit  $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  l'opérateur de différence première défini par :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad (\Delta P)(z) = P(z+1) - P(z), \quad \text{où } \Delta P = \Delta(P) \tag{1}$$

1. (a) Démontrer que  $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  est une application linéaire *localement nilpotente*, c'est-à-dire (en notant  $\Delta^n = \Delta \circ \dots \circ \Delta$  ( $n$  fois) et  $\Delta^0 = \operatorname{id}$ ) :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \exists n \in \mathbf{N} \text{ tel que } \Delta^n P = 0.$$

- (b) Existe-t-il un entier  $p \in \mathbf{N}$  tel que  $\Delta^p = 0$  ?

2. Démontrer que  $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  n'est pas injective et décrire son noyau.

3. On définit la suite  $(H_n)_{n \geq 0}$  des *polynômes de Hilbert* sur  $\mathbf{C}$  par :

$$H_0(z) = 1; \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad H_n(z) = \frac{z(z-1)(z-n+1)}{n!}.$$

- (a) Démontrer que  $\Delta H_0 = 0$ ,  $\Delta H_n = H_{n-1}$  si  $n \geq 1$ , et  $(\Delta^k H_n)(0) = \delta_{n,k}$ .
- (b) Démontrer que  $(H_n)_{n \geq 0}$  est une base de  $\mathcal{P}$  et que, plus précisément :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad P = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^n P)(0) H_n \tag{2}$$

Expliciter les coefficients du polynôme  $z \rightarrow z^3$  sur la base  $(H_n)$ .

- (c) Démontrer que  $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  est surjective. Comment conciliez-vous cela avec la question 2)?
4. (a) Soit  $p$  un entier fixé; on écrit  $z^p = f(z+1) - f(z)$ , avec  $f \in \mathcal{P}$  et  $f(0) = 0$ . Démontrer que

$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad \sum_{n=0}^N n^p = f(N+1) \quad (3)$$

- (b) Donner une formule simple pour calculer  $\sum_{n=0}^N n^3$  en fonction de  $N$ .
5. (a) Pour  $P \in \mathcal{P}$ , on pose  $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ . Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur  $\mathcal{P}$ .
- (b) L'application linéaire  $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  est-elle continue pour la norme précédente?
- (c) Montrer qu'il existe une norme sur  $\mathcal{P}$  pour laquelle  $\Delta$  est continue.

**Indication :** on pourra utiliser le caractère localement nilpotent de  $\Delta$  pour définir à partir de la formule (2) une norme faisant de  $\Delta$  une application linéaire de norme 1.

6. On rappelle le *lemme de Baire pour les espaces vectoriels normés complets* ou « espaces de Banach » (admis ici) : Si  $(F_n)_{n \geq 0}$  est une suite de fermés d'un espace de Banach dont la réunion est tout l'espace, alors l'un au moins de ces fermés,  $F_p$ , est d'intérieur non-vide ( $\overset{\circ}{F}_p \neq \emptyset$ ). On se donne  $X$  un tel espace de Banach (ici sur  $\mathbf{C}$ ).

- (a) Soit  $Y$  un sous-espace vectoriel de  $X$ ; montrer que  $\overset{\circ}{Y} \neq \emptyset \implies Y = X$ .
- (b) Soit  $T : X \rightarrow X$  une application linéaire continue *localement nilpotente* :

$$\forall x \in X, \exists n \in \mathbf{N} : T^n(x) = 0.$$

Démontrer que  $T$  est nilpotente : il existe  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $T^n = 0$ .

7. (a) L'espace vectoriel  $\mathcal{P}$  est-il complet pour la norme construite au 5)c)?
- (b) L'espace vectoriel  $\mathcal{P}$  est-il complet pour au moins une norme?

## - Partie II : L'espace $\mathcal{E}$ des fonctions entières -

Soit  $\mathcal{E}$  l'espace vectoriel des fonctions entières, c'est-à-dire des fonctions  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  qui s'écrivent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où la série entière figurant au second membre a un rayon de convergence infini. On a immédiatement  $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ .

1. (a) Démontrer que les  $a_n$  sont déterminés de façon unique par  $f$  et que l'on a plus précisément :

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt. \quad (4)$$

- (b) On pose  $M(f, r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ . Démontrer que :

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad |a_n| \leq \frac{M(f, r)}{r^n}. \quad (5)$$

- (c) Démontrer que  $\mathcal{P}$  n'est pas égal à  $\mathcal{E}$  (il suffira de donner un exemple d'une fonction  $f \in \mathcal{E}$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , qui n'est pas un polynôme; on justifiera la réponse).
- (d) Démontrer que les seules fonctions de  $\mathcal{E}$  qui sont bornées sont les constantes.
- (e) Démontrer que

$$f \in \mathcal{P} \iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge uniformément sur } \mathbf{C} \text{ tout entier.}$$

2. Cette question a pour but de mettre en place quelques propriétés importantes de l'espace  $\mathcal{E}$ .

- (a) Soit  $(f_k)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{E}$ ,  $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} z^n$ . On suppose que  $(f_k)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout compact de  $\mathbf{C}$ . Démontrer que  $f$  appartient à  $\mathcal{E}$ .

**Indication :** on pourra commencer par démontrer que :

$$\forall R > 0, \exists M > 0 \quad / \quad \forall (n, k) \in \mathbf{N}^2, |a_n^{(k)}| \leq \frac{M}{R^n}.$$

- (b) Démontrer qu'une fonction  $f$  de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}$  appartient à  $\mathcal{E}$  si et seulement s'il existe une suite de polynômes  $(P_n)$  convergeant uniformément vers  $f$  sur tout compact de  $\mathbf{C}$ .
- (c) Démontrer que  $\mathcal{E}$  est stable par produit, c'est-à-dire que  $f, g \in \mathcal{E} \implies fg \in \mathcal{E}$ .
- (d) Soit  $f \in \mathcal{E}$ ,  $a \in \mathbf{C}$  et  $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  définie par  $g(z) = f(z + a)$ . Montrer que  $g \in \mathcal{E}$ . Ainsi,  $\mathcal{E}$  est stable par translation.

3. Une suite  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  de complexes est dite un *multiplicateur* de  $\mathcal{E}$  si, pour toute fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{E},$$

la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n z^n$  définit un élément de  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire a un rayon de convergence infini.

On se propose de montrer qu'on a équivalence entre :

- i)  $(\lambda_n)$  est un multiplicateur de  $\mathcal{E}$ ;
- ii) il existe des constantes  $A, B > 0$  telles que :  $\forall n \in \mathbf{N}, |\lambda_n| \leq AB^n$ .

- (a) Démontrer que ii) implique i).
- (b) On suppose que ii) n'est pas réalisée. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante  $(n_j)_{j \geq 1}$  d'entiers  $\geq 1$  avec :  $\forall j \geq 1, |\lambda_{n_j}| > j^{n_j}$ . Puis montrer qu'il existe une fonction  $f \in \mathcal{E}$ , de la forme  $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j} z^{n_j}$ , telle que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_{n_j} \lambda_{n_j} z^{n_j}$  ne soit pas infini. En déduire que ii) implique i).

- 4. (a) Démontrer que  $\Delta$ , défini par  $(\Delta f)(z) = f(z + 1) - f(z)$ , envoie  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$ .
- (b) Décrire le noyau  $\ker \Delta$  de  $\Delta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , et montrer que ce noyau est de dimension infinie. Ainsi,  $\Delta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est très loin d'être injective. On verra dans la partie III qu'elle est cependant surjective.

5. On rappelle que pour  $\rho > 0$  et  $f$  définie et continue sur le cercle de centre 0 et de rayon  $\rho$  ( $|w| = \rho$ ), à valeurs complexes, l'intégrale curviligne

$$I = \int_{|w|=\rho} f(w) dw$$

est par définition :

$$I = \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) i \rho e^{it} dt. \tag{6}$$

- (a) Démontrer que  $|I| \leq 2\pi\rho M(f, \rho)$ .
- (b) Montrer que si  $f$  appartient à  $\mathcal{E}$  alors  $I = 0$ .
- (c) Soit un élément  $h$  de  $\mathcal{E}$  et un entier  $k \in \mathbf{Z}$ . On pose :

$$J_k(h, \rho) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} w^k h(w) dw .$$

Démontrer que  $J_{-1}(h, \rho) = h(0)$  et  $J_k(h, \rho) = 0$  pour tout  $k \geq 0$ .

6. (a) Montrer qu'il existe une fonction  $g$  de  $\mathcal{E}$  telle que

$$w \in \mathbf{C} \implies e^w = 1 + w + w^2 g(w) \quad \text{avec de plus} \quad |g(w)| \leq e - 2 \quad \text{si} \quad |w| = 1 .$$

- (b) Soit  $k \in \mathbf{Z}$ , et

$$I_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{w^k}{e^w - 1} dw .$$

- i) Démontrer que  $I_k$  est bien définie.
- ii) Démontrer que  $I_0 = 1$  et que  $I_k = 0$  si  $k \geq 1$ .

**Indication :** on pourra par exemple faire intervenir une série géométrique.

### - Partie III : L'équation de Guichard dans $\mathcal{E}$ -

#### A) Les polynômes de Bernoulli et une application :

Pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $z \in \mathbf{C}$ , on pose :

$$B_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{e^{zw}}{(e^w - 1)} \frac{dw}{w^n} . \tag{7}$$

1. Démontrer que

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_{k-n}}{k!} z^k$$

puis que  $B_n$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ . Calculer  $B_0$ .

2. (a) Démontrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*, B'_n(x) = nB_{n-1}(x) . \tag{8}$$

- (b) Démontrer que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \forall n \in \mathbf{N}^*, B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1} , \tag{9}$$

et que  $B_n(1) = B_n(0)$  pour tout entier  $n \geq 2$ .

3. (a) Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \int_0^1 B_n(x) dx = 0 . \tag{10}$$

- (b) Calculer  $B_1, B_2, B_3$ .

Les deux questions suivantes proposent une application (à l'ordre 2) des polynômes  $B_n$ .

4. Soit  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ .

- (a) Démontrer que

$$\int_0^1 h(t) dt = \frac{h(0) + h(1)}{2} - \int_0^1 h'(t) B_1(t) dt .$$

(b) Montrer ensuite que

$$\int_0^1 h(t) dt = \frac{h(0) + h(1)}{2} + \frac{h'(0) - h'(1)}{12} + \frac{1}{2} \int_0^1 h''(t) B_2(t) dt .$$

5. Soit  $\varphi : [1, \infty[ \rightarrow \mathbf{C}$  une fonction de classe  $C^1$ , et  $N$  un entier non nul. On pose :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \varphi(n) \quad \text{et} \quad I_N = \int_1^N \varphi(t) dt .$$

On désigne par  $\pi_2$  la fonction 1-périodique valant  $\frac{B_2}{2}$  sur  $[0, 1[$ .

(a) Montrer qu'on a, pour  $n \in \mathbf{N}^*$  :

$$\int_n^{n+1} \varphi(t) dt = \frac{\varphi(n) + \varphi(n+1)}{2} + \frac{\varphi'(n) - \varphi'(n+1)}{12} + \int_n^{n+1} \varphi''(t) \pi_2(t) dt .$$

(b) Démontrer que

$$S_N = I_N + \frac{1}{2} (\varphi(1) + \varphi(N)) + \frac{1}{12} (\varphi'(N) - \varphi'(1)) - \int_1^N \varphi''(t) \pi_2(t) dt .$$

(c) On suppose que  $|\varphi''|$  est intégrable sur  $[1, \infty[$  et que  $\varphi(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \varphi(n)$  et l'intégrale généralisée (impropre)  $\int_1^\infty \varphi(t) dt$  sont de même nature.

(d) Quelle est la nature de la série de terme général  $\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$  ?

## B) Solution de l'équation (G) de Guichard

1. (Question préliminaire) : Soit  $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ ,  $g \in \mathcal{E}$ . On veut résoudre l'équation  $\Delta f = g$ , avec  $f \in \mathcal{E}$ . Pourquoi est-il plausible de prendre

$$f = \sum_{n=0}^\infty b_n \frac{B_{n+1}}{n+1} ?$$

Qu'est-ce qui pourrait empêcher ce choix ?

*La suite de cette partie est consacrée à une modification des polynômes de Bernoulli destinée à contourner cet obstacle.*

2. On se propose d'abord de montrer par l'absurde le fait suivant :

$$\text{Il existe } c > 0 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbf{N}, |w| = (2n+1)\pi \implies |e^w - 1| \geq c . \quad (11)$$

On suppose donc qu'une telle constante  $c$  n'existe pas.

i) Montrer qu'on peut trouver des suites  $(n_j)_{j \geq 1}$  d'entiers positifs et  $(w_j)_{j \geq 1}$  de complexes telles que  $|w_j| = (2n_j + 1)\pi$  et  $\lim_{j \rightarrow \infty} e^{w_j} = 1$ .

ii) Démontrer que l'on a :  $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{Re}(w_j) = 0$  et  $\lim_{j \rightarrow \infty} (|\text{Im}(w_j)| - (2n_j + 1)\pi) = 0$ .

iii) Montrer qu'il existe une suite  $(\varepsilon_j)$ , à valeurs dans  $\{+1, -1\}$  et telle que la quantité  $\delta_j = w_j - i\varepsilon_j(2n_j + 1)\pi$  tende vers 0 quand  $j$  tend vers  $+\infty$ .

iv) Conclure que (11) est vrai.

Dans ce qui suit, on pose, pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $z \in \mathbf{C}$  :

$$\rho_n = (2n+1)\pi; \quad A_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=\rho_n} \frac{e^{zw}}{(e^w - 1) w^n} dw . \quad (12)$$

3. Démontrer que  $A_n$  est dans  $\mathcal{E}$ , et que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall z \in \mathbf{C}, (\Delta A_n)(z) = nz^{n-1}.$$

4. Montrer qu'il existe des constantes  $a$  et  $b$  strictement positives telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall z \in \mathbf{C}, |A_n(z)| \leq ae^{nb|z|}. \quad (13)$$

5. Soit  $g \in \mathcal{E}$ . Démontrer que l'équation de Guichard  $(G)$  :  $f(z+1) - f(z) = g(z)$  possède au moins une solution dans  $\mathcal{E}$ . Décrire toutes les solutions de  $(G)$ .

## – Partie IV : La version multiplicative $(H)$ de l'équation de Guichard –

Soit  $q \in \mathbf{C}^*$ . On considère dans cette partie l'équation « aux  $q$ -différences »

$$(H) \quad f(qz) - f(z) = g(z), \quad \text{avec } g \in \mathcal{E}.$$

1. On suppose  $|q| \neq 1$ . Démontrer que  $(H)$  possède une solution  $f \in \mathcal{E}$  si et seulement si  $g(0) = 0$ . Décrire alors l'ensemble de toutes les solutions.

Dans la suite, on suppose  $|q| = 1$  et plus précisément  $q = e^{2i\pi\theta}$ , où  $\theta \notin \mathbf{Q}$ .

2. (**Question préliminaire**) : Pour  $x \in \mathbf{R}$ , on note  $\|x\|$  la distance de  $x$  à l'entier le plus proche :

$$\|x\| = d(x, \mathbf{Z}) = \inf_{m \in \mathbf{Z}} |x - m| = \min_{m \in \mathbf{Z}} |x - m|.$$

Démontrer que  $\|x\| \leq \frac{1}{2}$ , et qu'on a la double inégalité :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 4\|x\| \leq |e^{2i\pi x} - 1| \leq 2\pi\|x\|.$$

**Indication** : on rappelle que  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \implies \sin u \geq \frac{2}{\pi}u$ .

3. On dit que  $\theta$  est *lentement approchable* (par des rationnels) s'il existe  $a > 0$  et  $b > 1$  tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \|n\theta\| \geq ab^{-n}. \quad (14)$$

On dit que  $\theta$  est *vite approchable* si  $\theta \notin \mathbf{Q}$  et si  $\theta$  n'est pas lentement approchable. On note  $A$  l'ensemble des irrationnels lentement approchables, et  $B$  l'ensemble des irrationnels vite approchables.

(a) Démontrer que  $\sqrt{2} \in A$ .

(b) Montrer qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs  $(p_k)_{k \geq 1}$  telle que l'on ait :

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_k}} \in B.$$

**Indication** : on pourra définir les  $p_k$  de proche en proche afin d'avoir une croissance suffisamment rapide.

4. Soit  $\theta$  un irrationnel, et  $q = e^{2i\pi\theta}$ .

(a) Montrer la double inégalité :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 4\|n\theta\| \leq |q^n - 1| \leq 2\pi\|n\theta\|.$$

(b) Montrer qu'on a équivalence entre :

i)  $\theta$  est *lentement approchable*, autrement dit  $\theta \in A$  ;

ii) pour toute  $g \in \mathcal{E}$  avec  $g(0) = 0$ , l'équation  $(H)$  possède une solution  $f \in \mathcal{E}$ .

**Indication** : on pourra utiliser la question 3) de la partie II sur les multiplicateurs de  $\mathcal{E}$ .