Agrégation interne de Mathématiques

(et CAERPA)

Session 2008

Première épreuve écrite

Notations

On désigne par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On désigne par E^* l'espace vectoriel dual de E. On désigne par $\mathrm{End(E)}$ l'algèbre des endomorphismes de E et par $\mathrm{GL(E)}$ le groupe des endomorphismes inversibles de E. On note $\mathbf{1}_\mathbf{E}$ l'application identique de E.

Si u est un endomorphisme de E, on note ${}^t u$ l'endomorphisme de E^* transposé de u ; si X est une partie de $\mathrm{End(E)}$, on note ${}^t\mathrm{X}$ l'ensemble des transposés des élements de X.

Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F et soit x un vecteur de E. Pour alléger les notations, il nous arrivera d'écrire ux pour désigner l'image $u(x)$ du vecteur x par l'application u.

Soit n un entier $\geqslant 1$; on désigne par $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ l'algèbre des matrices carrées complexes à n lignes et n colonnes. On note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la i-ème ligne et j-ième colonne qui est égal à 1. On note $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ le groupe des matrices inversibles et $\mathbf{1}_n$ la matrice unité de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbf{C}$-algèbres possédant chacune un élément unité ; un *morphisme unitaire* d'algèbres de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est une application $\mathbf{C}$-linéaire qui préserve les produits et les éléments unités.

Les deux premières parties sont indépendantes. La sixième partie est indépendante des précédentes.

Partie I

1) Soit W un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $p_1,\dots,p_n$ des endomorphismes de W. Pour $i=1,\dots,n$, on note W_i l'image de p_i.

Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'espace vectoriel W est somme directe des sous-espaces W_i et, pour $i=1,\dots,n$, p_i est le projecteur d'image W_i parallèlement à la somme directe des W_j, $j\neq i$.

(ii) Pour $i=1,\dots,n$, on a ${p_i}^2=p_i$; pour $j\neq i$, on a $p_i p_j=0$; et on a $p_1+\ldots+p_n=\mathbf{1}_\mathrm{W}$.

2) Soit toujours W un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, soit n un entier $\geqslant 1$ et soit $\rho:\mathrm{M}_n(\mathbf{C})\to\mathrm{End(W)}$ un morphisme unitaire d'algèbres.

a) Pour $i=1,\dots,n$, on note p_i l'endomorphisme $\rho(\mathrm{E}_{i,i})$. Démontrer que les endomorphismes p_i satisfont à la condition (ii) de la question (I.1).

b) Pour $i=1,\dots,n$, on note W_i l'image de p_i. Démontrer que la restriction de $\rho(\mathrm{E}_{i,j})$ à W_j induit un isomorphisme de W_j sur W_i.

c) Dans la suite de cette question, on fixe une base $(w_1,\dots,w_r)$ de l'espace vectoriel W_1. On pose

$$v_1=w_1,\quad v_2=\rho(\mathrm{E}_{2,1})w_1,\quad \ldots\quad,\quad v_n=\rho(\mathrm{E}_{n,1})w_1.$$

Démontrer que la famille $(v_1,\dots,v_n)$ est libre et que, pour tous entiers s, t et k compris entre 1 et n, on a

$$\rho(\mathrm{E}_{s,t})v_k=\delta_{t,k}v_s,$$

où le symbole de Kronecker $\delta_{t,k}$ vaut 1 lorsque $t=k$, et vaut 0 sinon.

d) Plus généralement, pour $1 \leqslant j \leqslant r$, on note V_j le sous-espace vectoriel de W engendré par les vecteurs $\rho(E_{k,1})w_j$, pour $k = 1, \dots, n$. Démontrer que W est somme directe des sous-espaces V_j , $1 \leqslant j \leqslant r$.

e) Démontrer qu'il existe une base de l'espace vectoriel W dans laquelle, pour toute matrice $M \in M_n(\mathbf{C})$, la matrice de l'endomorphisme $\rho(M)$ est la matrice diagonale par blocs

$$\operatorname{diag}(M, \dots, M) = \begin{pmatrix} M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M \end{pmatrix}$$

Partie II

Dans cette partie, on désigne par E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'une partie X de End(E) est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de X sont $\{0\}$ et E . On désigne par $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de End(E) qui contient $\mathbf{1}_E$, et on se propose de démontrer qu'elle est égale à End(E) .

1) Soient u et v des éléments de End(E) qui commutent entre eux. Démontrer que tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

2) Soit X une partie irréductible de End(E) . Démontrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent à tous les éléments de X est l'ensemble des endomorphismes scalaires.

3) Rappelons que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de End(E) contenant $\mathbf{1}_E$. Démontrer que ${}^t\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\text{End}(E^*)$.

4) Soit x un vecteur non nul de E . Préciser à quoi est égal le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}x$ de E .

5) Soit $u \in \text{End}(E)$ un endomorphisme de rang 1 . Démontrer qu'il existe un vecteur y de E et une forme linéaire $\ell \in E^*$ tels que l'on ait $u(x) = \ell(x)\,y$ pour tout $x \in E$.

6) Démontrer que, si l'algèbre $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme de rang 1 , alors elle les contient tous. En déduire que l'on a alors $\mathcal{A} = \text{End}(E)$.

7) Dans cette question, on suppose que $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme u dont le rang r est $\geqslant 2$, et on se propose de démontrer qu'il existe un endomorphisme $u' \in \mathcal{A}$, non nul, dont le rang est strictement plus petit que r .

a) Démontrer qu'il existe x et y dans E et v dans $\mathcal{A}$ tels que le couple de vecteurs $(u(x), u(y))$ soit libre et que l'on ait $vu(x) = y$.

b) Démontrer qu'il existe alors $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que la restriction de l'endomorphisme $uv - \lambda\,\mathbf{1}_E$ à l'image $u(E)$ de u ne soit ni injective ni nulle.

c) Vérifier que l'endomorphisme $u' = uvu - \lambda u$ convient.

8) Démontrer finalement que l'on $\mathcal{A} = \text{End}(E)$.

Tournez la page S.V.P.

Partie III

Soit n un entier $\geqslant 1$. On appelle *dérivation* de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ toute application linéaire d de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telle que, pour tous X et $\mathrm{Y} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on ait

$$d(\mathrm{XY}) = d(\mathrm{X})\,\mathrm{Y} + \mathrm{X}\,d(\mathrm{Y}).$$

1) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$; démontrer que l'application $d_{\mathbf{A}}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ définie par

$$d_{\mathbf{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{AX} - \mathrm{XA},$$

est une dérivation.

2) Dans cette question, on se propose de démontrer que toute dérivation de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ est de la forme ci-dessus.

a) Soit $d : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ une dérivation. Démontrer que l'application ρ de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{M}_{2n}(\mathbf{C})$ définie par

$$\rho(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & d(\mathrm{X}) \\ 0 & \mathrm{X} \end{pmatrix}$$

est un morphisme unitaire d'algèbres.

b) Démontrer qu'il existe une matrice inversible $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$ où A, B, C, D appartiennent à $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, telle que l'on ait, pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\mathrm{P}\,\rho(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & 0 \\ 0 & \mathrm{X} \end{pmatrix} \mathrm{P}.$$

c) Conclure.

Partie IV

Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\mathrm{Tr}(\mathrm{M})$ la trace de M, somme des coefficients diagonaux de M.

1) a) Démontrer que l'application ψ de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$\psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{XY}),$$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

b) Démontrer que, si $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n^2})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, il existe une autre base $(\mathrm{X}'_1, \ldots, \mathrm{X}'_{n^2})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telle que, pour tous entiers i et j compris entre 1 et n^2, on ait

$$\psi(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}'_j) = \delta_{i,j} \qquad \text{(symbole de Kronecker).}$$

2) Démontrer que, pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on a

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} \mathrm{X}_i \mathrm{A} \mathrm{X}'_i = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\,\mathbf{1}_n\,.$$

Partie V

On considère dans cette partie un sous-groupe G de $GL(n, \mathbf{C})$ ayant la propriété suivante :
(P) *Il existe un entier* $m \geqslant 1$ *tel que l'on ait* $g^m = \mathbf{1}_n$ *pour tout* $g \in G$.
On fixe l'entier m .

1) Démontrer que chaque élément g de G est diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

2) Démontrer que l'ensemble $\{\mathrm{Tr}(g),\, g \in G\}$ est fini.

3) On suppose, dans cette question, que l'ensemble G, considéré comme ensemble d'endomorphismes de $\mathbf{C}^n$ (en identifiant $M_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{End}(\mathbf{C}^n)$), est irréductible.

a) Démontrer que l'ensemble G contient une base de l'espace vectoriel $M_n(\mathbf{C})$.

b) Démontrer que l'ensemble G est fini (on pourra utiliser les questions (IV.1) et (V.2)).

4) Dans cette question, on ne suppose plus que l'ensemble G soit irréductible.

a) Démontrer qu'il existe des entiers p et q , avec $p + q = n$, et une base de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ dans laquelle chaque élément g de G s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} T(g) & U(g) \\ 0 & V(g) \end{pmatrix},$$

où $T(g) \in M_p(\mathbf{C})$ et $V(g) \in M_q(\mathbf{C})$.

b) Posons $G_1 = \{g \in G,\, T(g) = \mathbf{1}_p\}$ et $G_2 = \{g \in G,\, V(g) = \mathbf{1}_q\}$. Démontrer que G_1 et G_2 sont des sous-groupes distingués de G .

Déterminer $G_1 \cap G_2$.

c) Soient K un groupe et H un sous-groupe de K . L'*indice* de H dans K est le cardinal de l'ensemble quotient K/H . Établir le résultat général suivant :
Soient K un groupe, K_1 et K_2 des sous-groupes distingués de K , tous deux d'indice fini dans K ; alors l'indice de $K_1 \cap K_2$ dans K est fini.

d) Conclure.

Partie VI

Soient n et m des entiers $\geqslant 1$. Soient $A \in M_n(\mathbf{C})$ et $B \in M_m(\mathbf{C})$; on définit la matrice $A * B \in M_{nm}(\mathbf{C})$ par

$$A * B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

1) Démontrer que l'application ϕ de $M_n(\mathbf{C}) \times M_m(\mathbf{C})$ dans $M_{nm}(\mathbf{C})$ définie par $\phi(A, B) = A * B$ est bilinéaire et satisfait à

$$(A * B)\,(A' * B') = AA' * BB'$$

pour toutes matrices A , $A' \in M_n(\mathbf{C})$, B , $B' \in M_m(\mathbf{C})$.

2) Démontrer que l'image de l'application ϕ engendre l'espace vectoriel $M_{nm}(\mathbf{C})$.

Tournez la page S.V.P.

On suppose désormais $n = m$.

3) Posons

$$\mathrm{P} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathrm{E}_{i,j} * \mathrm{E}_{j,i}.$$

a) Démontrer que l'on a $\mathrm{P}^2 = \mathbf{1}_n$.

b) Démontrer que, pour toutes matrices A , $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on a

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{A} * \mathrm{B})\,\mathrm{P} = \mathrm{B} * \mathrm{A}.$$

4) Soient A et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

a) Calculer la trace et le déterminant de la matrice $\mathrm{A} * \mathrm{B}$.

b) Déterminer les valeurs propres de $\mathrm{A} * \mathrm{B}$ en fonction de celles de A et de B .