Agrégation interne de Mathématiques

(et CAERPA)

Session 2007

Deuxième épreuve écrite

Objectif et conventions

Le but de ce problème est de construire une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}$, dérivable et dont la dérivée s'annule en tout point d'un ensemble dense dans $\mathbf{R}$. En fait, c'est la fonction F réciproque de celle-ci qui est construite.

On note $\overline{\mathbf{R}}$ l'ensemble $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Lorsque, dans certaines conditions, une suite ou une fonction tend vers $+\infty$, on dit qu'elle a $+\infty$ pour limite dans $\overline{\mathbf{R}}$. On fait la convention analogue pour $-\infty$.

Si A et B sont deux ensembles, on note $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ l'ensemble des points de A qui n'appartiennent pas à l'ensemble B.

Dans tout le problème, on désigne par f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Autrement dit $f(x) = x^{1/3}$.

I . La fonction racine cubique

A. Dérivées au sens généralisé

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et a un point de I. Soit $g : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une fonction continue au point a. On dit que la fonction g est *dérivable au sens généralisé* au point a lorsque le rapport $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbf{R}}$ lorsque x tend vers a, avec $x \neq a$.

Même dans le cas d'une limite infinie, on écrit $g'(a) = \ell$.

1) Soient I et J des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ et soit g une bijection croissante de I sur J. On suppose que la fonction g est dérivable au sens généralisé en tout point de I. Démontrer que la fonction g^{-1}, réciproque de g, est dérivable au sens généralisé en tout point de J, et que, pour tout $a \in \mathrm{J}$, on a

$$(g^{-1})'(a) = \frac{1}{g'(g^{-1}(a))},$$

avec les conventions $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

2) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

a) Soit c un point de I. On suppose que la fonction g est dérivable au sens généralisé au point c et qu'elle admet un maximum local en c. Démontrer que l'on a $g'(c) = 0$.

b) On suppose que la fonction g est dérivable au sens généralisé en tout point de l'intervalle I. Soient a, $b \in \mathrm{I}$ tels que $a < b$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

[on pourra examiner dans un premier temps le cas où $g(a) = g(b)$].

3) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Soit a un point de I. On suppose que la fonction g est dérivable en tout point de $\mathrm{I} - \{a\}$, et que la fonction $x \mapsto g'(x)$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbf{R}}$ lorsque x tend vers a, avec $x \neq a$.

a) Soit x un point de I distinct de a ; posons $\mathrm{J}_x =]a,x[$ si $x > a$ et $\mathrm{J}_x =]x,a[$ si $x < a$. Démontrer que l'on a

$$\inf\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\} \ \leqslant\ \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \ \leqslant\ \sup\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\}.$$

b) Démontrer que la fonction g est dérivable au sens généralisé au point a et que l'on a $g'(a) = \ell$.

B. La fonction racine cubique

Rappelons que l'on désigne par f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1) a) Démontrer que la fonction f est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbf{R}$ et que l'on a $f'(0) = +\infty$.

b) Soient s et t des nombres réels $\neq 0$. Démontrer l'équivalence

$$f'(s) \leqslant f'(t) \iff |s| \geqslant |t|.$$

c) Soit a un nombre réel > 0. Démontrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto f(x+a) - f(x-a)$ atteint son maximum en 0.

d) Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant 2\left| f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\right|$.

e) Démontrer que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

2) a) Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a $x^2 + xy + y^2 \geqslant \dfrac{3}{4}\, x^2$.

b) En déduire que, pour x et $x_0 \in \mathbf{R}$, tels que $x \neq x_0$ et $x_0 \neq 0$, on a

$$0 \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 4f'(x_0).$$

C. Construction d'une suite dense

Notons g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(t) = t\cos t$. Rappelons que l'on désigne par f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1) a) Démontrer que la fonction $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbf{R}$. Étudier en particulier $(g \circ f)'(0)$.

b) Démontrer que $(g \circ f)'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Dans les questions suivantes de cette partie, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$a_n = g(f(n)) = n^{1/3}\cos(n^{1/3}).$$

2) Soient $x \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que $k\pi \geqslant |x|$.

a) Démontrer qu'il existe un nombre réel $y(k,x)$ dans l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $g(y(k,x)) = x$.

b) On note n_k la partie entière de $y(k,x)^3$. Démontrer que la suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ a pour limite x.

3) Démontrer que l'ensemble $\{a_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

4) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $\lambda_n = \dfrac{1}{n^2+1}\cdot$ Démontrer que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes.

II . Construction de la fonction F

Dans cette partie, on se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels *strictement positifs*. On suppose que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes.

1) a) Démontrer que la série de fonctions, dont le terme général est la fonction $x \mapsto \lambda_n f(x-a_n)$, est uniformément convergente sur toute partie compacte de $\mathbf{R}$.

Dans le suite de cette partie, on pose, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x-a_n).$$

b) Démontrer que la fonction F est continue et strictement croissante.

c) Démontrer que,

pour tout $x > a_0$, on a $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a_0) \geqslant \lambda_0\, f(x-a_0)$,

pour tout $x < a_0$, on a $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a_0) \leqslant \lambda_0\, f(x-a_0)$.

d) En déduire les limites de la fonction F en $+\infty$ et $-\infty$.

e) Démontrer que la fonction F est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Nous allons démontrer, dans la suite de cette partie, que la fonction F *possède une dérivée au sens généralisé en tout point de* $\mathbf{R}$.

2) Démontrer que, pour x et $x_0 \in \mathbf{R}$, tels que $x \neq x_0$, et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} \leqslant \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0}.$$

3) Démontrer que la fonction F est dérivable au sens généralisé au point a_n et que l'on a $\mathrm{F}'(a_n) = +\infty$.

4) Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que x_0 n'est égal à aucun a_n, $n \in \mathbf{N}$, mais que la série de terme général $\lambda_n f'(x_0-a_n)$ est divergente.

a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, si l'on a $0 < |x-x_0| < \varepsilon$, alors on a

$$1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, f'(x_0-a_k).$$

b) En déduire que la fonction F est dérivable au sens généralisé au point x_0 et que l'on a $\mathrm{F}'(x_0) = +\infty$.

5) Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que x_0 n'est égal à aucun a_n, $n \in \mathbf{N}$, et que la série de terme général $\lambda_n f'(x_0-a_n)$ est convergente.

a) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $x \neq x_0$, on a

$$\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0-a_k).$$

b) En déduire que la fonction F est dérivable au point x_0 et que l'on a $\mathrm{F}'(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0-a_k)$.

6) Démontrer que la fonction F^{-1}, réciproque de F, est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$.

III . Parties denses de $\mathbf{R}$

A. Intersections d'ensembles ouverts denses

Donnons-nous, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, un sous-ensemble ouvert V_n de $\mathbf{R}$, dense dans $\mathbf{R}$.
On pose $\mathrm{B} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{V}_n$.

1) Soit I un intervalle ouvert, non vide, de $\mathbf{R}$.

a) Démontrer qu'il existe des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n < v_n$;

(ii) $[u_0, v_0] \subset \mathrm{I} \cap \mathrm{V}_0$;

(iii) pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset]u_n, v_n[\cap \mathrm{V}_{n+1}$.

b) Démontrer que l'ensemble $\mathrm{I} \cap \mathrm{B}$ n'est pas vide.

2) Démontrer que l'ensemble B est dense dans $\mathbf{R}$.

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de B . En considérant les ensembles ouverts $\mathrm{V}_n - \{x_n\}$, démontrer que l'ensemble $\mathrm{B}' = \mathrm{B} - \{x_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

B. Parties de $\mathbf{R}$ contenant de « gros » ensembles compacts

1) Soient a et $b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$, et soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de l'intervalle $[a, b]$. On suppose que l'ensemble $\mathrm{C} = \{c_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est compact. Soit ε un nombre réel > 0 et soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $2\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \leqslant \varepsilon$.

a) Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, posons $\mathrm{I}_k =]c_k - \alpha_k, c_k + \alpha_k[$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que l'ensemble C soit contenu dans la réunion $\bigcup_{0\leqslant k\leqslant n} \mathrm{I}_k$.

b) Démontrer qu'il existe une fonction continue $g : [a, b] \to [0, 1]$ telle que l'on ait

$g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{C}$;

$g(x) = 0$ pour tout $x \notin \bigcup_{0\leqslant k\leqslant n} \mathrm{I}_k$.

c) Démontrer l'inégalité $\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \varepsilon$.

2) Soit A une partie de $\mathbf{R}$. On suppose que, pour tous nombres réels a et b tels que $a < b$, il existe une partie compacte C de $\mathbf{R}$, contenue dans $\mathrm{A} \cap [a, b]$, et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tels que, pour toute fonction continue $g : [a, b] \to [0, 1]$, satisfaisant à $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{C}$, on ait $\int_a^b g(t)\,dt \geqslant \varepsilon$.

a) Démontrer que, pour tous nombres réels a et b tels que $a < b$, l'ensemble $\mathrm{A} \cap [a, b]$ n'est pas dénombrable.

b) Démontrer que l'ensemble A est dense dans $\mathbf{R}$, et que, pour toute partie dénombrable D de A , l'ensemble $\mathrm{A} - \mathrm{D}$ est encore dense dans $\mathbf{R}$.

IV . Les points de pente infinie de F

On reprend les notations de la partie II. On se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels strictement positifs. On suppose que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes, et l'on pose $\mathrm{F}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n f(x-a_n)$. On suppose de plus que l'ensemble $\mathrm{D}=\{a_n;\ n\in\mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

A. Densité de l'ensemble des points de pente infinie

1) Pour $x\in\mathbf{R}$ et $\mathrm{T}\in]0,+\infty[$, posons $g_{\mathrm{T}}(x)=\inf\{\mathrm{T},f'(x)\}$.

a) Soit $\mathrm{T}\in]0,+\infty[$. Démontrer que, pour tout $x\in\mathbf{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n g_{\mathrm{T}}(x-a_n)$ est convergente.

b) Pour $x\in\mathbf{R}$, posons $\mathrm{G}_{\mathrm{T}}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n g_{\mathrm{T}}(x-a_n)$. Démontrer que la fonction G_{T} est continue sur $\mathbf{R}$.

c) Démontrer que, pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a $\mathrm{F}'(x)=\sup\{\mathrm{G}_{\mathrm{T}}(x);\ \mathrm{T}\in]0,+\infty[\}$, où la borne supérieure est prise dans $\overline{\mathbf{R}}$.

2) Soit M un nombre réel >0. On pose $\mathrm{U}_{\mathbf{M}}=\{x\in\mathbf{R};\ \mathrm{F}'(x)>\mathrm{M}\}$.

a) Démontrer que l'ensemble $\mathrm{U}_{\mathbf{M}}$ est la réunion des ensembles $\{x\in\mathbf{R};\mathrm{G}_{\mathrm{T}}(x)>\mathrm{M}\}$ pour $\mathrm{T}\in]0,+\infty[$.

b) Démontrer que l'ensemble $\mathrm{U}_{\mathbf{M}}$ est ouvert et dense dans $\mathbf{R}$.

3) Soit A l'ensemble $\{x\in\mathbf{R};\ \mathrm{F}'(x)=+\infty\}$. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{A}-\mathrm{D}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

B. Densité des points de pente finie

1) Soient a et $b\in\mathbf{R}$ et soit $\varepsilon>0$ tels que $a+\varepsilon<b$. Soit M un nombre réel >0 ; notons C l'ensemble $\{x\in[a,b];\ x\notin\mathrm{U}_{\mathbf{M}}\}$. Soit $g:[a,b]\to[0,1]$ une fonction continue telle que $g(x)=1$ pour tout $x\in\mathrm{C}$.

Démontrer l'inégalité $\int_a^b \mathrm{M}\,g(t)\,dt+\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)\geqslant \mathrm{M}(b-a)$.

2) Soit B l'ensemble $\{x\in\mathbf{R};\ \mathrm{F}'(x)\neq+\infty\}$. Démontrer que, pour toute partie dénombrable N de B, l'ensemble $\mathrm{B}-\mathrm{N}$ est dense dans $\mathbf{R}$.
