Notations.

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}^*$ celui des entiers naturels non nuls, par $\mathbb{R}$ celui des réels, par $\mathbb{R}_+$ celui des réels positifs ou nuls.

On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des complexes ; si $s \in \mathbb{C}$, on note $\Re(s)$ sa partie réelle et $\Im(s)$ sa partie imaginaire. Lorsque l'on pose :

$$s = \alpha + i\beta,$$

on signifie par là que $\alpha = \Re(s)$ et $\beta = \Im(s)$.

Soit $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $\sigma \neq +\infty$ et $\sigma \neq -\infty$, on désigne par $\Pi(\sigma)$ le demi-plan formé des complexes s tels que $\Re(s) > \sigma$. On pose $\Pi(+\infty) = \emptyset$, et $\Pi(-\infty) = \mathbb{C}$.

On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$.

Si $\phi \in \mathcal{C}$, on dit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \phi(t)dt$ converge lorsque $\int_0^X \phi(t)dt$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque X tend vers $+\infty$. On note alors $\int_0^{+\infty} \phi(t)dt$ la valeur de cette limite. On rappelle que $\int_0^{+\infty} \phi(t)dt$ peut converger sans que ϕ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Objectifs. La partie I est consacrée à la transformation de *Laplace*. Certains des résultats qui y sont énoncés sont utilisés tout au long du problème. La partie II étudie les rapports entre le comportement au voisinage de 0 de la transformée de *Laplace* d'une application f et l'existence de $\mathcal{L}(f)(0)$. La partie III s'attache à étudier un résultat assez fin relatif à ce genre de situation, connu sous le nom de théorème d'*Ikehara*.

I. La transformation de *Laplace*

Soit $f \in \mathcal{C}$. Si $s \in \mathbb{C}$, on dit que $\mathcal{L}(f)(s)$ est défini lorsque l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xs} f(x)dx$ converge. On note alors $\mathcal{L}(f)(s)$ la valeur de cette intégrale. Le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$, noté $\mathcal{DL}(f)$, est une partie de $\mathbb{C}$. L'application $\mathcal{L}(f)$, qui va donc de $\mathcal{DL}(f)$ dans $\mathbb{C}$, est appelée transformée de *Laplace* de f.

1. Premier exemple

Dans ce I1, f désigne l'application constante égale à 1 sur $\mathbb{R}_+$.

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{L}(f)(\alpha)$ est défini si, et seulement si, α est strictement positif. Calculer $\mathcal{L}(f)(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

b. Soit $s = i\beta$, où $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrer que, lorsque X tend vers $+\infty$ par valeurs réelles, e^{-Xs} n'admet pas de limite dans $\mathbb{C}$.

c. Soit $s = \alpha + i\beta$. Montrer que $\mathcal{L}(f)(s)$ est défini si, et seulement si, α est strictement positif. Calculer $\mathcal{L}(f)(s)$ pour $s \in \Pi(0)$.

Indication. On commencera par déterminer $|e^z|$ lorsque z est un complexe.

2. Abscisse de convergence

Soit $f \in \mathcal{C}$.

a. Soit $s_0 = \alpha_0 + i\beta_0 \in \mathcal{DL}(f)$. On pose, pour tout x réel positif ou nul :

$$F(x) = \int_0^x e^{-ts_0} f(t)dt.$$

Soit $s \in \Pi(\alpha_0)$. Montrer que s appartient à $\mathcal{DL}(f)$ et que :

$$\mathcal{L}(f)(s) = (s - s_0) \int_0^{+\infty} e^{-x(s-s_0)} F(x)dx.$$

Indication. On pourra procéder à une intégration par parties.

b. Montrer qu'il existe un unique $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Si $\Re(s) > \sigma$, $\mathcal{L}(f)(s)$ est défini ;

(ii) Si $\Re(s) < \sigma$, $\mathcal{L}(f)(s)$ n'est pas défini.

Ce σ est appelé abscisse de convergence de $\mathcal{L}(f)$. On le notera $\sigma(f)$ lorsque l'on voudra marquer sa dépendance vis-à-vis de f.

c. Montrer que, si f est à valeurs réelles positives ou nulles et si $s \in \Pi(\sigma)$, l'application $t \mapsto e^{-ts} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3. Deuxième exemple

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = e^{\lambda x}.$$

Déterminer $\mathcal{DL}(f)$, $\sigma(f)$ et $\mathcal{L}(f)$.

4. Propriétés de $\mathcal{L}(f)$

Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $\sigma(f) < +\infty$.

a. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\Pi(\sigma(f))$.

Indication. On pourra utiliser I2a.

b. On pose, pour $s = \alpha + i\beta \in \Pi(\sigma(f))$:

$$L(\alpha, \beta) = \mathcal{L}(f)(s).$$

Montrer que L est de classe C^1 sur l'ensemble $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \alpha > \sigma(f)\}$. Montrer aussi que $\frac{\partial L}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = -\int_0^{+\infty} x e^{-xs} f(x)dx$.

Indication. On pourra utiliser I2a.

c. Montrer que, sur l'intervalle réel $]\sigma(f), +\infty[$, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et donner, pour $k \in \mathbb{N}$, une expression intégrale de la dérivée d'ordre k de $\mathcal{L}(f)$, notée $\mathcal{L}(f)^{(k)}$.

d. Montrer que $\mathcal{L}(f)(\alpha)$ tend vers 0 lorsque α tend vers $+\infty$ par valeurs réelles.

Indication. On pourra utiliser I2a. On pourra ensuite introduire un réel η tel que $|F(x)| \leq \epsilon$ pour $x \in [0, \eta]$, puis écrire :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x(\alpha-\alpha_0)} F(x)dx = \int_0^{\eta} e^{-x(\alpha-\alpha_0)} F(x)dx + \int_{\eta}^{+\infty} e^{-x(\alpha-\alpha_0)} F(x)dx.$$

II. Comportement asymptotique d'une transformée de *Laplace*

Dans toute cette partie II, on considère une application f, élément de $\mathcal{C}$. On examinera les rapports qui peuvent exister entre le comportement de $\mathcal{L}(f)$ au voisinage de 0 et l'existence de $\mathcal{L}(f)(0)$.

1. Cas où $\mathcal{L}(f)(0)$ est défini

Dans cette question II1, on suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

a. Montrer que $\sigma(f) \leq 0$.

b. Montrer que $\mathcal{L}(f)(\alpha)$ admet une limite, lorsque α tend vers 0 par valeurs réelles strictement positives, et que cette limite est égale à $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Indication. On pourra utiliser I2a.

2. Un contre-exemple

Dans cette question II2, on suppose que f est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \sin t$.

a. Déterminer $\mathcal{DL}(f)$, ainsi que $\mathcal{L}(f)(s)$ pour $s \in \mathcal{DL}(f)$.

b. Montrer que $\mathcal{L}(f)(\alpha)$ admet une limite, lorsque α tend vers 0 par valeurs réelles strictement positives, bien que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ ne converge pas.

3. Cas d'une application f positive

Dans cette question II3, on suppose que f est à valeurs positives ou nulles, que $\sigma(f) \leq 0$ et que $\mathcal{L}(f)(\alpha)$ admet, lorsque α tend vers 0 par valeurs réelles strictement positives, la limite réelle λ.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Déterminer sa valeur.

4. Un exemple de théorème taubérien

Dans cette question II4, on suppose que $xf(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

a. Vérifier que $\sigma(f) \leq 0$.

b. Montrer que $\frac{1}{A}\int_0^A |xf(x)|dx$ tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$.

c. Montrer que, pour tous α et A réels strictement positifs, on a :

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x)e^{-x\alpha}dx\right| \leq \frac{e^{-A\alpha}}{A\alpha}\sup_{t\geq A}|tf(t)|.$$

d. On fait, dans cette question II4d, l'hypothèse supplémentaire que $\mathcal{L}(f)(\alpha)$ admet, lorsque α tend vers 0 par valeurs réelles strictement positives, la limite complexe μ.
Déduire de ce qui précède qu'alors $\mathcal{L}(f)(0)$ est défini.

Indication. On pourra étudier la différence $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}dx - \int_0^A f(x)dx$ en choisissant convenablement α en fonction de A, et utiliser, en la justifiant, l'inégalité $1 - e^{-u} \leq u$ pour $u \geq 0$.

III. Le théorème taubérien d'*Ikehara*

Le but de cette partie est d'étudier le comportement de f en $+\infty$, à partir du comportement de $\mathcal{L}(f)$ au voisinage de la droite $\Re(s) = 1$. Cette partie est assez largement indépendante de la partie II.

A. Préliminaires

A1. Calcul d'une intégrale

Soit Δ l'application continue sur $\mathbb{R}$ définie pour $x \neq 0$ par :

$$\Delta(x) = \frac{\sin^2 x}{\pi x^2}.$$

a. Montrer que $\sigma(\Delta) \leq 0$.

b. Pour $\alpha > 0$, calculer $\big(\mathcal{L}(\Delta)\big)''(\alpha)$. En déduire la valeur de $\mathcal{L}(\Delta)(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

c. Montrer que $\mathcal{L}(\Delta)$ est définie, et continue, sur $\mathbb{R}_+$. En déduire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x)dx = 1.$$

A2. Calcul d'une intégrale

Soient $\lambda > 0$ et $\eta > 0$.

On définit l'application H, de $[-2\lambda, 2\lambda]$ dans $\mathbb{C}$, par :

$$H(\beta) = \frac{1}{\pi}(1 - \frac{|\beta|}{2\lambda})e^{i\eta\beta}.$$

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} H(\beta)e^{-i\beta x}d\beta.$$

On donnera une expression de cette intégrale à l'aide de l'application Δ, définie dans le IIIA1.

A3. Le lemme de ***Riemann-Lebesgue***

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Montrer que, lorsque γ tend vers $+\infty$ par valeurs réelles, $\int_a^b f(t)e^{i\gamma t}dt$ tend vers 0.
On admettra que ce résultat s'applique au cas d'une application f continue sur un segment $[a, b]$.

B. Le théorème

Dans toute cette partie IIIB, on considère une application f, élément de $\mathcal{C}$, telle que $\sigma(f) \leq 1$. On suppose en outre f croissante sur $\mathbb{R}_+$, et à valeurs réelles positives ou nulles.
Pour $s \in \Pi(0)$, on pose, ce qui a bien un sens d'après l'hypothèse faite sur $\sigma(f)$:

$$\delta(s) = \mathcal{L}(f)(1 + s) - \frac{1}{s}.$$

On remarquera dans la suite que :

$$\frac{1}{s} = \int_0^{+\infty} e^{-xs}dx.$$

On fait l'hypothèse $\mathcal{P}$ suivante :

$\mathcal{P}$ Il existe une application r de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout λ réel strictement positif:

$$\sup_{|\beta|\leq\lambda} |\delta(\alpha + i\beta) - r(\beta)| \underset{\alpha\to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Le théorème d'*Ikehara*, but de cette partie III, affirme qu'alors, si $g(x) = f(x)e^{-x}$, on a :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

B1. Continuité de r

Montrer que l'application r est continue sur $\mathbb{R}$.

B2. Une égalité d'intégrales

Dans cette question IIIB2, on fixe $\lambda > 0$ et $\eta > 0$.
On considère, comme dans le IIIA2, l'application H, de $[-2\lambda, 2\lambda]$ dans $\mathbb{C}$:

$$H(\beta) = \frac{1}{\pi}(1 - \frac{|\beta|}{2\lambda})e^{i\eta\beta}.$$

On note aussi, pour $\alpha > 0$:

$$K(\alpha) = \int_{-2\lambda}^{2\lambda} H(\beta)\delta(\alpha + i\beta)d\beta.$$

a. Déterminer la limite de $K(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Indication. On utilisera l'hypothèse $\mathcal{P}$.

b. Du IIIA2, déduire que, pour tout α réel strictement positif :

$$K(\alpha) = 2\lambda \int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}\Delta(\lambda(\eta - x))(g(x) - 1)dx.$$

Indication. On utilisera, en la justifiant, l'interversion de deux intégrales.

c. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}\Delta(\lambda(\eta - x))dx \underset{\alpha\to 0+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \Delta(\lambda(\eta - x))dx.$$

d. Après avoir montré la convergence de l'intégrale qui figure dans le membre de gauche de l'égalité (1) ci-dessous, vérifier cette égalité.

$$(1) \qquad 2\lambda \int_0^{+\infty} \Delta(\lambda(\eta - x))(g(x) - 1)dx = \int_{-2\lambda}^{2\lambda} H(\beta)r(\beta)d\beta.$$

Indication. On utilisera IIIB2a, IIIB2b et IIIB2c.

B3. Un calcul de limite

On reprend les notations du IIIB2, mais on ne fixe à présent que $\lambda > 0$.

a. Déterminer :

$$\lim_{\eta\to+\infty} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} H(\beta)r(\beta)d\beta.$$

b. De la relation (1), déduire :

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\eta\lambda} \Delta(u) g(\eta - \frac{u}{\lambda}) du \underset{\eta \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

B4. Une majoration de $g(x)$

a. On fixe $\eta \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. En utilisant la croissance de f, montrer :

$$\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \Delta(u) g(\eta - \frac{u}{\lambda}) du \geq \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \Delta(u) g(\eta - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{u}{\lambda}} du.$$

b. Du IIIB4a, déduire :

$$\int_{-\infty}^{\eta\lambda} \Delta(u) g(\eta - \frac{u}{\lambda}) du \geq g(\eta - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) e^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \Delta(u) du.$$

c. De ce qui précède, déduire que, pour tout ϵ strictement positif et strictement plus petit que 1, il existe un réel A tel que, pour tout $x \geq A$:

$$g(x) \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}.$$

Indication. On utilisera la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x) dx$, ainsi que la relation (2).

B5. Une minoration de $g(x)$

a. Montrer que g est majorée sur $\mathbb{R}_+$.

Indication. On utilisera IIIB4c.

b. En utilisant un raisonnement analogue à celui du IIIB4, montrer que, pour tout ϵ strictement positif, il existe un réel A tel que, pour tout $x \geq A$:

$$g(x) \geq 1 - \epsilon.$$

Indication. On décomposera $\int_{-\infty}^{\lambda\eta}$ en $\int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} + \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} + \int_{\sqrt{\lambda}}^{\lambda\eta}$ pour $\eta \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

B6. Conclusion

En déduire que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^x$.