Épreuve d'Analyse de l'agrégation interne de Mathématiques
Session de 1998

Introduction, notations et définitions.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres réels et des nombres complexes. $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensembles des nombres réels strictement positifs et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels privé de 0. $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

ln désigne la fonction logarithme népérien.

Toutes les suites (u_n) considérées sont indexées par $\mathbb{N}^*$. Si la suite (u_n) a pour limite l, on écrit $u_n \to l$.

E (resp. E_1) désigne l'espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodiques et continues (resp. 2π-périodiques et continûment dérivables) ; pour f appartenant à E, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \qquad \text{et} \qquad \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$$

Le but du problème est l'étude des sommes partielles $S_n(f, x_0)$ de la série de Fourier d'une fonction f de E en un **point fixé** x_0 de $\mathbb{R}$:

$$S_n(f, x_0) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx_0} \qquad \text{avec} \qquad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

On sait que $S_n(f, x_0)$ peut ne pas avoir de limite ; on se propose de démontrer que cependant, **sous une forme affaiblie**, on a une convergence de $S_n(f, x_0)$ vers $f(x_0)$. On étudie pour cela les moyennes de Cesáro

$$T_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |S_N(f, x_0) - f(x_0)| \qquad (N \in \mathbb{N}^*)$$

Le problème se compose de trois parties :

La partie **I** établit deux résultats préliminaires A et B ;

La partie **II** qui n'utilise que A, conclut à la convergence affaiblie annoncée ;

La partie **III**, qui utilise B, étudie la convergence affaiblie de sous-suites de la suite des sommes partielles.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les constantes utilisées dans les inégalités ont été choisies très simples et sont en général loin d'être les meilleures possibles.

PARTIE I

A Suites presque convergentes et moyennes de Cesaro.

Une partie T de $\mathbb{N}^*$ est dite négligeable si $\dfrac{|T_n|}{n} \to 0$, où $T_n = T \cap [1, n]$ et $|T_n|$ désigne le cardinal de T_n.

Une suite (a_n) de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ est dite presque convergente vers $l \in \mathbb{C}$ (en abrégé $a_n \overset{ps}{\to} l$) s'il existe $T \subset \mathbb{N}^*$ négligeable telle que :

(1) $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists p \in \mathbb{N}^*)(\forall n \in \mathbb{N}^*)((n \geq p \text{ et } n \notin T) \Rightarrow |a_n - l| \leq \varepsilon)$$

(l est alors unique ; on ne demande pas de le vérifier)

1°/ Montrer que l'ensemble $P = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists m \in \mathbb{N}^*, n = m^2\}$ des carrés parfaits est négligeable.

2°/ a) Montrer que (a_n) définie par $\begin{cases} n \text{ si } n \in P \\ \dfrac{1}{n} \text{ sinon} \end{cases}$ est presque convergente vers 0.

b) Une sous-suite d'une suite presque convergente est-elle presque convergente ?

Dans les deux questions qui suivent, (a_n) est une suite de réels , $(b_n) = \left(\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)$ la suite de ses moyennes de Cesáro et on suppose que $b_n \to 0$.

3°/ On suppose de plus les a_n **réels positifs ou nuls**.

a) Montrer qu'il existe une suite décroissante (u_n) de $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n \to 0$ et $\dfrac{b_n}{u_n} \to 0$.

b) Soit $T = \{j \in \mathbb{N}^* \mid a_j \geq u_j\}$. Montrer que T est négligeable.

c) En déduire que $a_n \overset{ps}{\to} 0$.

4°/ Montrer que l'hypothèse de positivité faite en **3°/** est essentielle en donnant un exemple de suite (a_n) de réels pour laquelle $|a_n| \to +\infty$ alors que $b_n \to 0$.

B Encadrement d'une fonction définie par une intégrale.

1°/ Montrer que, pour $r \in [0, 1[$ fixé, la formule :

$$P_r(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nt)$$

définit un élément P_r de E tel que, pour tout k appartenant à $\mathbb{Z}$, $c_k(P_r) = r^{|k|}$; on pose $P(r, t) = P_r(t)$.

2°/ a) Montrer que : $P(r, t) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} = \dfrac{1 - r^2}{(1 - r^2) + 4r\sin^2(\frac{t}{2})}$.

b) Montrer que, pour tout $|t| \leq \pi$: $\dfrac{1 - r}{(1 - r)^2 + t^2} \leq P(r, t) \leq \dfrac{6(1 - r)}{(1 - r)^2 + rt^2}$.

(On rappelle que, pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi} x$)

3°/ On suppose que $0 < |t| \leq \dfrac{1}{2\pi}$. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

a) Montrer que l'intégrale $\psi(t) = \displaystyle\int_0^1 P(r, t)\,(\ln \tfrac{1}{r})^{\alpha - 1}\,dr$ est convergente.

b) Montrer que, pour $0 \leq r \leq \dfrac{1}{2}$: $\ln(1 - r) \geq -2r$, et en déduire que $\psi(t) \geq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{1/2} \dfrac{r^\alpha}{r^2 + t^2}\,dr$.

c) Montrer que $\psi(t) \leq 12\displaystyle\int_0^{1/2} \dfrac{r^\alpha}{r^2 + t^2}\,dr + 12$.

4°/ Montrer qu'il existe deux réels a et b strictement positifs ne dépendant que de α tels que, pour $0 < |t| \leq \pi$, on ait :

$$a|t|^{\alpha - 1} \leq \psi(t) \leq b|t|^{\alpha - 1}.$$

PARTIE II

A Sommes partielles de séries de Fourier.

On rappelle que, pour f appartenant à E et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

(2) $$S_n(f, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_n(t)\, dt$$

où D_n appartenant à E est le noyau de Dirichlet donné par :

(3) $$0 < |t| \leq \pi,\ D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 2\frac{\sin nt}{t} + r_n(t),\ \text{ avec } |r_n(t)| \leq 2.$$

(On ne demande pas de vérifier ces égalités.)

1°/ Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) \in \mathbb{U}^N$.

a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \sin nt\right|^2 dt = N\frac{\pi}{2}$.

b) Soit $\delta \in]0, \pi[$; montrer l'inégalité :

$$\int_0^{\pi} \left|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \frac{\sin nt}{t}\right| dt \leq \delta N^2 + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(\int_0^{\pi} \left|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \sin nt\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

c) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \frac{\sin nt}{t}\right| dt \leq 3\,N$.

d) En utilisant **(3)**, montrer que $\displaystyle\left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n D_n\right\|_1 \leq 5N$

2°/ Soit h appartenant à E. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$ appartenant à $\mathbb{U}^N$, dépendant de h, x_0 et N, tels que :

$$T_N(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 - t) \left(\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \frac{D_n(t)}{N}\right) dt - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n h(x_0).$$

En déduire que : $T_N(h) \leq 6\, \|h\|_\infty$.

3°/ Pour f appartenant à E et n à $\mathbb{N}^*$, on définit f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\, dt$.

a) Montrer que f_n appartient à E_1.

b) Montrer que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$; ainsi E_1 est dense dans $(E, \|\ \|_\infty)$.

4°/ Montrer que, pour g appartenant à E_1, $T_N(g) \to 0$.

5°/ Soit f appartenant à E.

a) Montrer que, pour g appartenant à E_1, $T_n(f) \leq T_N(g) + 6\, \|f - g\|_\infty$.

b) En déduire que : $(S_n(f, x_0)) \overset{ps}{\to} f(x_0)$.

PARTIE III

A Sous-suite de la suite des sommes partielles.

1°/ Soit (λ_n) une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}^*$ telle qu'il existe un réel $c > 0$ vérifiant la condition suivante :

(4) $$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) \in \mathbb{U}^N, \left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n D_{\lambda_n}\right\|_1 \leq cN.$$

Montrer que, pour toute fonction f de E, $S_{\lambda_n}(f, x_0) \xrightarrow{ps} f(x_0)$.

Dans toute la fin du problème la suite (λ_n) et le réel $\alpha \in]0,1[$ vérifient les trois conditions suivantes :

i) $\lambda_1 = 1$;

ii) $\forall(u, v) \in {\mathbb{N}^*}^2, \lambda_{u+v} = \lambda_u + \lambda_v$;

iii) Il existe un réel $A > 0$ tel que : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} {\lambda_n}^{-\alpha} \leq AN{\lambda_N}^{-\alpha}$.

(La suite (λ_n) définie par $\lambda_n = n^2$, par exemple, vérifie ces conditions avec $\alpha = \dfrac{1}{3}$ et $A = 3$).

2°/ a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 r^n \left[\ln\left(\tfrac{1}{r}\right)\right]^{\alpha-1} dr$, avec $\displaystyle\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \left[\ln\left(\tfrac{1}{r}\right)\right]^{\alpha-1} dr$.

b) Soit $0 < |t| \leq \pi$; montrer que la formule $\displaystyle\varphi(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{(n+1)^\alpha}$ définit une fonction φ telle que $\varphi(t) = \dfrac{\psi(t)}{\Gamma(\alpha)}$, où ψ est la fonction définie en **I** B **3°/a)**. Justifier que φ est continue sur $[-\pi, 0[\cap]0, \pi]$.

3°/ a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'intégrale $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-ikt}\, dt$ est absolument convergente ; on note encore sa valeur $c_k(\varphi)$.

b) Montrer que $\displaystyle c_k(\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 c_k(P_r) \left[\ln\left(\tfrac{1}{r}\right)\right]^{\alpha-1} dr = \frac{1}{(1+|k|)^\alpha}$.

(On pourra dans une intégrale double intervertir sans justification l'ordre des intégrations.)

4°/ Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) \in \mathbb{U}^N$ et $\displaystyle I_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n e^{i\lambda_n t}\right|^2 \varphi(t)\, dt$.

a) Montrer que : $\displaystyle I_N = N + \sum_{\substack{1 \leq j,k \leq N \\ j \neq k}} \varepsilon_j \bar{\varepsilon}_k c_{\lambda_k - \lambda_j}(\varphi)$. En déduire que : $I_N \leq 3AN^2{\lambda_N}^{-\alpha}$.

b) Vérifier que : $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \sin \lambda_n t\right|^2 \varphi(t)\, dt \leq I_N$.

c) Établir l'inégalité :

$$\int_0^\pi \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin \lambda_n t}{t}\right| dt \leq \delta N \lambda_N + B\delta^{-\alpha/2}\sqrt{I_N}$$

où B est une constante strictement positive et δ un élément arbitraire de $]0, \pi[$.

5°/ Montrer qu'il existe une constante c telle que la relation **(4)** ait lieu.