Préliminaires

Dans tout le problème, si n est un entier naturel ≥ 2 et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, c'est à dire une fonction n-fois continûment dérivable, définie sur $[0,1]$ à valeurs réelles, on posera, pour k entier, $0 \leq k \leq n$,

$$M_k(f) = \sup_{0\leq t\leq 1} |f^{(k)}(t)|, \qquad m_k(f) = \Big(\int_0^1 [f^{(k)}(t)]^2 dt\Big)^{1/2},$$

et on notera plus simplement $M_k = M_k(f)$ et $m_k = m_k(f)$ s'il n'y a pas risque de confusion.

Dans les parties I et II, on désignera par f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,1]$ telle que :

(i) $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$, pour $0 \leq k \leq n-1$,

(ii) $m_0(f) = 1$,

et il s'agira de montrer qu'une telle fonction vérifie

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \big(M_k(f)\big)^{-1/k} \leq \pi e,$$

alors que la partie III donnera un résultat du même type pour une fonction ne vérifiant pas la condition d'annulation en 1.

Partie I

On rappelle que, pour des fonctions f, g à valeurs réelles, continues sur $[0,1]$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\Big(\int_0^1 f(t)g(t)dt\Big)^2 \leq \int_0^1 [f(t)]^2 dt . \int_0^1 [g(t)]^2 dt.$$

1 . Etablir que, pour $0 \leq k \leq n$, $m_k \leq M_k$ et, en écrivant $f^{(k)}$ à l'aide de $f^{(k+1)}$, que, pour $0 \leq k \leq n-1$, $M_k \leq m_{k+1}$.

2 .

a . A l'aide d'une intégration par parties, prouver que, pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$m_k^2 \leq m_{k-1} . m_{k+1}.$$

b . En déduire que, pour $0 \leq k \leq n$, $m_k > 0$ et, par récurrence, que la suite $(\mu_k)_{0\leq k\leq n}$, $\mu_k = {m_k}^{1/k}$, avec $\mu_0 = 1$, est croissante.

3 . Dans toute la suite du problème, on désigne par F la fonction définie dans le plan complexe par

$$F(z) = F(x+iy) = \int_0^1 e^{-zt}[f(t)]^2 dt = \int_0^1 e^{-(x+iy)t}[f(t)]^2 dt$$

et par $\tilde{F}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\tilde{F}(x,y) = F(x+iy)$.

a . Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $F(x) \geq e^{-x}$.

b . En développant l'exponentielle en série, justifier que F est développable en série entière au voisinage de 0. Préciser le rayon de convergence de ce développement.

4 . A partir de l'expression intégrale de $\tilde{F}$, montrer que $\tilde{F}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, c'est à dire admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2, et vérifie la relation $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = i\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x}$.

5 . Montrer que, pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, et, pour tout complexe $z \neq 0$,

$$F(z) = \frac{1}{z^k}\int_0^1 e^{-zt}(f^2)^{(k)}(t)dt.$$

6 . Montrer que, pour $\Re e\, z = x \geq 0$, $|F(z)| \leq 1$, et déduire de **5** que, si de plus $z \neq 0$ et k entier avec $1 \leq k \leq n$,

$$|F(z)| \leq \frac{1}{|z|^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} m_j m_{k-j} \leq \left(\frac{2\mu_k}{|z|}\right)^k,$$

où $\dbinom{k}{j}$ désigne le coefficient du binôme $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

7 . Pour $b > 0$, on définit la fonction h_b dans le demi-plan $x > 0$ par

$$h_b(x,y) = \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{y-b}{x}\right).$$

a . Prouver que h_b se prolonge continûment au demi-plan $x \geq 0$ privé du point $(0,b)$ et expliciter ce prolongement que l'on notera encore h_b (on pourra remarquer que $h_b(x,y)$ mesure l'angle entre un vecteur que l'on précisera et le vecteur joignant ib à $x+iy$).

b . Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{h_b(x,0)}{x} = \dfrac{1}{b}$ (la limite est prise lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives).

Partie II

Pour une fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, on note

$$\Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}.$$

8 . Avec les notations de la partie I, on pose, pour $k = 1, \ldots, n$, $b_k = 2e\mu_k$. On considère la fonction v définie sur le domaine D, constitué du demi-espace $x \geq 0$ privé des points $(0, b_1), \ldots, (0, b_n), (0, -b_1), \ldots, (0, -b_n)$, soit

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \} \setminus \{(0, b_1), \ldots, (0, b_n), (0, -b_1), \ldots, (0, -b_n)\}$$

par

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(h_{b_k}(x, y) + h_{b_k}(x, -y) \right).$$

a . Vérifier que sur D, on a $0 \leq v(x, y) \leq n$.

b . Prouver que $\Delta v = 0$ sur $\overset{\circ}{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$.

9 . Soit U une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^2$ et soit G une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur U telle que, pour tout $(x, y) \in U$, $\Delta G(x, y) > 0$. Montrer que G ne peut avoir de maximum sur U (on pourra raisonner par l'absurde en considérant un point (x_0, y_0) de U où un maximum serait atteint et introduire les fonctions $g_1(t) = G(x_0 + t, y_0)$, $g_2(t) = G(x_0, y_0 + t)$).

10 . Soit V une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et G une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur V telle que $\Delta G \geq 0$ sur V. On suppose que l'ensemble $K = \{(x, y) \in V | G(x, y) \geq 0\}$ est compact. En appliquant la question précédente à l'intérieur U de K et aux fonctions G_ϵ, $\epsilon > 0$, définies sur V par $G_\epsilon(x, y) = G(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2)$, montrer que $G \leq 0$ sur V.

11 . Dans cette question et les suivantes, V désignera l'ensemble ouvert

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, \tilde{F}(x, y) \neq 0\},$$

où $\tilde{F}$ est la fonction introduite dans la partie I. On note u la fonction définie sur V par

$$u(x, y) = \ln |\tilde{F}(x, y)| = \frac{1}{2} \ln \left(\tilde{F}(x, y) \overline{\tilde{F}(x, y)} \right),$$

où ln désigne la fonction usuelle logarithme népérien, et on pose $w = u + v$. Montrer que $\Delta w = 0$ sur V.

12 . Dans cette question ϵ désigne un réel strictement positif fixé et on utilise les inégalités établies en **6**.

a . On convient que $b_{n+1} = +\infty$. Soient $k = 1, \ldots, n$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ tels que $b_k \leq |y_0| < b_{k+1}$. Etablir l'inégalité

$$e^{v_k(0, y_0)} |\tilde{F}(0, y_0)| \leq e^{-1},$$

où, pour $(x,y) \in D \cup \{(0,b_k),(0,-b_k)\}$,

$$v_k(x,y) = \frac{1}{\pi} \sum_{\ell=1,\ell\neq k}^{n} \left(h_{b_\ell}(x,y) + h_{b_\ell}(x,-y)\right).$$

En déduire que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe $r_{0,\epsilon} > 0$ tel que,

$$\text{si } x > 0 \text{ et } [x^2 + (y-y_0)^2]^{1/2} < r_{0,\epsilon}, \text{ on a } e^{v(x,y)}|\tilde{F}(x,y)| < e^{\epsilon}.$$

b . On pose $K_\epsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, e^{v(x,y)}|\tilde{F}(x,y)| \geq e^{2\epsilon}\}$. Soit $(x_n,y_n)_{n\geq 1}$ une suite de K_ϵ convergeant vers (x_0,y_0). Prouver que $x_0 > 0$, puis que $(x_0,y_0) \in K_\epsilon$. Vérifier que K_ϵ est borné et déduire de **10** que $w - 2\epsilon \leq 0$ sur V.

13 . Déduire de **12** que $w \leq 0$ sur V et que, pour $x > 0$, $-x + v(x,0) \leq 0$. Conclure que

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} \leq 1$$

et en déduire l'inégalité $(*)$.

Partie III

14 . Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des entiers naturels $a_{\ell,k}$, $\ell = 0, \ldots, [k/2]$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x, tels que, quelles que soient

- la fonction polynôme du second degré p satisfaisant à $p(I) \subset J$,
- la fonction g de classe C^k sur J,

on ait, pour tout $t \in I$,

$$(g \circ p)^{(k)}(t) = \sum_{\ell=0}^{[k/2]} a_{\ell,k} \left(g^{(k-\ell)} \circ p\right)(t)[p'(t)]^{k-2\ell}[p''(t)]^{\ell}.$$

Par un choix convenable des fonctions g et p, établir l'égalité

$$\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!^2} = \sum_{\ell=0}^{[k/2]} a_{\ell,k} \frac{2^{k-\ell}}{\ell!}.$$

15 . Dans cette question, g est une fonction de classe C^n sur $[0,1]$, $n \geq 2$, telle que
(i') $g^{(k)}(0) = 0$, pour $0 \leq k \leq n-1$,
(ii') $m_0(g) = 1$.

a . Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(t) = (g \circ p)(2t)$, où p est la fonction polynomiale $s \to 2s - s^2$. Etablir successivement les inégalités

$$\sup_{t\in[0,2]} \left|(g \circ p)^{(k)}(t)\right| \leq \binom{2k}{k} M_k(g), \quad M_k(f) \leq 8^k M_k(g).$$

b . Conclure que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(M_k(g)\right)^{-1/k} \leq 16\pi e.$$
