Agrégation interne de Mathématiques
session 1996
première composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag40e]

Dans tout le problème $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ désignent les ensembles de nombres habituels.

Pour $E \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ on note $\mathcal{M}_n(E)$ l'algèbre des matrices carrées (n, n) $(n \in \mathbb{N}^*)$ à coefficients dans E. La matrice unité est notée I_n; $\operatorname{tr}(A)$ désigne la trace de l'élément A de $\mathcal{M}_n(E)$ et $\det(A)$ son déterminant. On désigne par $[m..p]$ l'ensemble des entiers relatifs compris (au sens large) entre m et p.

$E[X]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients dans E. Un polynôme non nul est *unitaire* si et seulement si le coefficient de son terme dominant est 1.

Dans le cadre de ce problème une matrice A de $\mathcal{M}_n(E)$ est appelée *matrice cyclique* si et seulement si il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = I_n$; le plus petit entier naturel non nul p réalisant cette égalité est appelé *ordre de la matrice cyclique* A : c'est l'ordre du groupe cyclique engendré par A ; il sera noté $h(A)$.

L'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(E)$ est noté $\mathcal{C}_n(E)$. Nous appellerons *groupe de* $\mathcal{C}_n(E)$ toute partie de $\mathcal{C}_n(E)$ munie d'une structure de groupe pour le produit matriciel.

L'objet du problème est l'étude de propriétés des éléments et des groupes de $\mathcal{C}_n(\mathbb{Z})$, ainsi que la mise en évidence de représentations géométriques de certains groupes de $\mathcal{C}_n(\mathbb{Z})$ pour $n = 2, 3$ ou 4.

PARTIE I

Cette partie a pour but de déterminer $h(A)$ pour $A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et de montrer que $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ n'est pas un groupe pour le produit matriciel.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice cyclique de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A) = p$.

1. *a.* En considérant A comme un élément de $\mathcal{C}_2(\mathbb{C})$, prouver que ses valeurs propres λ_1 et λ_2 sont des racines p-ièmes de l'unité.

   b. Prouver que $\operatorname{tr}(A) \in \{-2, -1, 0, +1, +2\}$ et que $\det(A) = \pm 1$.

2. On pose $\varepsilon = \pm 1$.

   a. On suppose que $\operatorname{tr}(A) = 2\varepsilon$.
   Prouver que $\lambda_1 = \lambda_2 = \varepsilon$, que $A = \varepsilon I_2$ et que $h(A) = \frac{1}{2}(3 - \varepsilon)$.

   b. On suppose que λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres réelles distinctes.
   Prouver que $\lambda_1 = \varepsilon$, $\lambda_2 = -\varepsilon$ et que $h(A) = 2$.
   Prouver qu'il existe une infinité de matrices A satisfaisant à cette condition.

   c. On suppose que λ_1 et λ_2 ne sont pas réelles.
   Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2, puis $h(A)$ dans les trois cas suivants :
   $$\operatorname{tr}(A) = -1, \quad \operatorname{tr}(A) = 0, \quad \operatorname{tr}(A) = +1.$$
   Dans chacun des cas, prouver qu'il existe une infinité de matrices A satisfaisant aux conditions imposées.

3. *a.* Montrer qu'il existe un entier naturel non nul N_2 tel que pour toute matrice A de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ on ait :
   $$A^{N_2} = I_2.$$

   b. Cette propriété est-elle encore vraie pour les matrices de $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$?

4. *a.* Prouver que A^{-1} appartient également à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$. Déterminer $h(A^{-1})$.

   b. Prouver que $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ n'est pas un groupe pour la multiplication matricielle.

PARTIE II

Cette partie a pour but de mettre en évidence une famille de groupes de $\mathscr{C}_2(\mathbb{Z})$ et d'en donner une interprétation géométrique.

Soit $j = e^{2i\pi/3}$ et $\alpha = e^{i\pi/3}$. On désigne par $\mathbb{Z}[j]$ (respectivement $\mathbb{Z}[\alpha]$) l'ensemble des complexes de la forme $m + qj$ (respectivement $m + q\alpha$), où (m, q) parcourt $\mathbb{Z}^2$.

1. *a.* Prouver que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et que $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}[j]$.

   b. Déterminer l'ensemble des couples (m, q) d'entiers relatifs tels que $0 < |m + qj| \leqslant 1$; en déduire le groupe U_6 des unités de $\mathbb{Z}[j]$ (c'est-à-dire des éléments de l'anneau $\mathbb{Z}[j]$ inversibles dans $\mathbb{Z}[j]$).

2. U_6 est l'ensemble des affixes des sommets d'un hexagone P.

   Montrer que le groupe $\mathbf{I}(\mathrm{P})$ des isométries conservant P est engendré par deux éléments r et s vérifiant les relations $r^6 = \mathrm{id} = s^2$ et $r \circ s \circ r \circ s = \mathrm{id}$ où id désigne l'application identique.

3. Les nombres 1 et j constituent une base $\boldsymbol{B}$ de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel réel.

   a. Écrire les matrices de r et s dans la base $\boldsymbol{B}$.

   b. Établir un isomorphisme entre $\mathbf{I}(\mathrm{P})$ et un groupe G de $\mathscr{C}_2(\mathbb{Z})$. On précisera un couple de générateurs de G vérifiant les relations analogues à II.2. pour le produit matriciel.

4. *a.* Soit $z_1 = m_1 + q_1 j$ et $z_2 = m_2 + q_2 j$ deux éléments de $\mathbb{Z}[j]$ tels que $m_1 q_2 - m_2 q_1 = -1$.

   Prouver que tout élément de $\mathbb{Z}[j]$ s'écrit d'une et d'une seule façon comme combinaison linéaire à coefficients entiers de z_1 et z_2.

   b. Soit B une matrice de $\mathscr{C}_2(\mathbb{Z})$ telle que $h(\mathrm{B}) = 2$.

   Prouver que l'ensemble des matrices de la forme BAB où A décrit le groupe G défini au 3.*b.* est un groupe de $\mathscr{C}_2(\mathbb{Z})$ isomorphe à G.

   c. Déterminer explicitement une infinité de groupes de $\mathscr{C}_2(\mathbb{Z})$ isomorphes à G et préciser pour chacun d'eux un isomorphisme sur $\mathbf{I}(\mathrm{P})$.

PARTIE III

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On établit que les groupes de $\mathscr{C}_n(\mathbb{Z})$ sont finis, ainsi que l'existence d'un entier naturel non nul N_n tel que $\mathrm{A}^{\mathrm{N}_n} = \mathrm{I}_n$ pour toute matrice A de $\mathscr{C}_n(\mathbb{Z})$.

1. Soit A une matrice cyclique de $\mathscr{C}_n(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(\mathrm{A}) = p$.

   a. En considérant A comme un élément de $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$, montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et que ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des racines p-ièmes de l'unité.

   b. Soit $q_i = \min\{q$ entier naturel non nul $/ \lambda_i^q = 1\}$ pour $i = 1..n$.

   Prouver que $h(\mathrm{A}) = \mathrm{ppcm}(q_i)$, $i = 1..n$ (ppcm : plus petit commun multiple).

   c. Montrer que $|\mathrm{tr}(\mathrm{A})| \leqslant n$; que peut-on dire de A si $|\mathrm{tr}(\mathrm{A})| = n$ et si $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = n$?

Tournez la page S.V.P.

2. Soit G un groupe de $\mathscr{C}_n(\mathbb{Z})$. Nous désignons par $< G >$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les éléments de G.

   a. Montrer que $< G >$ est de dimension finie ; on posera alors $\dim(< G >) = k$.

   b. Soit $(X_i)_{(i = 1..k)}$ une base de $< G >$ formée d'éléments de G ;
   nous posons $T : G \longrightarrow \mathbb{C}^k$
   $$A \longmapsto T(A) = (\operatorname{tr}(AX_i))_{(i = 1..k)}.$$
   Soit A et B deux éléments de G vérifiant $T(A) = T(B)$; prouver que pour tout X de G on a :
   $$\operatorname{tr}((AB^{-1} - I_n)X) = 0.$$

   c. Montrer que l'application T est injective et en déduire que G est un groupe fini.

3. *a.* Démontrer que l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers dont les racines complexes sont de module 1 est fini.

   b. En déduire qu'il existe un entier naturel non nul N_n tel que :
   $$\forall A \in \mathscr{C}_n(\mathbb{Z}), \quad A^{N_n} = I_n.$$

PARTIE IV

L'objet de cette partie est de donner la liste des valeurs possibles de $h(A)$ pour A élément de $\mathscr{C}_i(\mathbb{Z})$ où $i = 2, 3, 4$.

Pour $d \in \mathbb{N}^*$ on note U_d le groupe des racines d-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

E_d désigne l'ensemble des éléments d'ordre d de ce groupe, dits *racines primitives* d*-ièmes de l'unité*. Rappelons que ce sont les complexes α^r où α est une racine primitive d-ième de l'unité et r décrit l'ensemble des entiers naturels inférieurs à d et premiers avec d.

Soit A une matrice cyclique de $\mathscr{C}_n(\mathbb{Z})$ d'ordre $h(A)$.

On rappelle que si λ ($\lambda \in E_d$) est valeur propre de A, alors *toutes les racines primitives* d*-ièmes de l'unité sont valeurs propres de* A.

1. L'indicateur d'Euler $\varphi(d)$ ($d \in \mathbb{N}^*$) dénombre les entiers naturels inférieurs ou égaux à d et premiers avec d. On sait qu'il vérifie la propriété :

   si ($d_1 > 1$ et $d_2 > 1$ et d_1 premier avec d_2) alors $\varphi(d_1 d_2) = \varphi(d_1)\varphi(d_2)$.

   a. Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$; prouver que $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

   b. Soit $d_1, d_2, \ldots, d_m$ les différents ordres des valeurs propres de A comme racines de l'unité dans $\mathbb{C}$; prouver que :
   $$n \geqslant \sum_{i=1}^{i=m} \varphi(d_i).$$

   c. Soit $\prod_{j=1}^{j=q} p_j^{k_j}$ la décomposition en facteurs premiers de $h(A)$; prouver que :
   $$n \geqslant \max_j (p_j^{k_j} - p_j^{k_j - 1}).$$

2. Déduire des deux majorations qui viennent d'être obtenues la liste des valeurs possibles de $h(A)$ et indiquer une valeur de N_n dans les cas $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

PARTIE V

Cette partie propose deux applications géométriques de l'étude précédente dans les cas $n = 3$ et $n = 4$.

A. Dans l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, muni d'un repère orthonormé direct $\boldsymbol{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère *l'octaèdre régulier* V_3 de centre O ayant pour sommets les points A, B, C de coordonnées A (1, 0, 0), B (0, 1, 0), C (0, 0, 1), ainsi que leurs symétriques A′, B′, C′ par rapport à l'origine O.

On se propose d'étudier le groupe $\mathbf{I}(V_3)$ des isométries qui conservent V_3 et son sous-groupe $\mathbf{I}^+(V_3)$ des isométries positives.

1. Préciser l'ordre du groupe $\mathbf{I}(V_3)$ et celui de $\mathbf{I}^+(V_3)$.

2. Prouver que $\mathbf{I}^+(V_3)$ est engendré par trois rotations r_1, r_2, r_3 d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ dont on précisera les axes orientés.

3. Soit $G(V_3)$ le groupe des matrices représentant dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ les parties linéaires des éléments de $\mathbf{I}(V_3)$.

   a. Prouver que $G(V_3)$ est un groupe de $\mathscr{G}_3(\mathbb{Z})$.

   b. Donner une famille de générateurs de $G(V_3)$.

   c. Donner explicitement un élément A de $G(V_3)$ tel que $h(A) = 6$.

   d. Quelles sont toutes les valeurs $h(A)$ effectives quand A décrit $G(V_3)$?

B. On considère un espace affine euclidien orienté de dimension 4, muni d'un repère orthonormé direct $\boldsymbol{R} = (O; e_1, e_2, e_3, e_4)$; $\boldsymbol{O}(4)$ désigne le groupe orthogonal en dimension 4.

On considère le polytope V_4 de centre O, ayant pour sommets les points A, B, C, D de coordonnées A (1, 0, 0, 0), B (0, 1, 0, 0), C (0, 0, 1, 0), D (0, 0, 0, 1), ainsi que leurs symétriques A′, B′, C′, D′ par rapport à l'origine O.

On se propose d'étudier le groupe $\mathbf{I}(V_4)$ des isométries conservant V_4 et son sous-groupe $\mathbf{I}^+(V_4)$ des isométries positives.

1. *a.* Déterminer un morphisme injectif de $\mathbf{I}(V_4)$ dans le groupe des permutations de l'ensemble des sommets du polytope V_4.

   b. Préciser l'ordre du groupe $\mathbf{I}(V_4)$.

2. Donner explicitement un élément de $\mathbf{I}^+(V_4)$ d'ordre 8.

3. En déduire un exemple de matrice A appartenant à $\mathscr{G}_4(\mathbb{Z}) \cap \boldsymbol{O}(4)$, telle que $h(A) = 8$.