Agrégation interne 94 Sujet 2.

Ce problème étudie certaines fonctions définies par des séries trigonométriques. La partie I fournit les valeurs des intégrales de Gauss et de Fresnel, qui seront utilisées dans la partie II pour étudier une série trigonométrique particulière. La partie III généralise certains résultats de la partie II à une classe importante de séries trigonométriques. Les trois parties sont indépendantes.

Il est rappelé aux candidats que la clarté de la rédaction et la rigueur des démonstrations constituent des éléments importants d'appréciation.

I

Dans toute cette partie, α désigne un nombre complexe non nul, de partie réelle négative ou nulle, et on pose

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

1. Etablir la convergence de l'intégrale $F(\alpha)$ (on pourra distinguer les cas $Re(\alpha) < 0$ et $Re(\alpha) = 0$).

2. Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes, continues sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On suppose que cette suite converge uniformément sur tout compact de $]0, +\infty[$ vers une fonction f. On suppose de plus qu'il existe une fonction m à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, continue sur $]0, +\infty[$, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} m(t)\, dt$ converge, et que, pour tout $t \in\,]0, +\infty[$, pour tout entier n, $|f_n(t)| \leq m(t)$.

2.a. Etablir la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.

2.b. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt.$$

3. Pour $(t, x) \in\,]0, +\infty[\, \times\,]0, +\infty[$, on pose

$$h(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{x(\alpha - t)},$$

et, si n et p sont deux entiers naturels non nuls,

$$f_n(t) = \int_{1/n}^{n} h(t, x)\, dx\ ; \quad g_p(x) = \int_{1/p}^{p} h(t, x)\, dt.$$

3.a. Montrer que f_n et g_p sont continues sur $]0, +\infty[$.

3.b. Démontrer l'égalité

$$\int_{1/p}^{p} f_n(t)\, dt = \int_{1/n}^{n} g_p(x)\, dx.$$

4.a. Montrer l'inégalité

$$|f_n(t)| \leq \frac{2}{\sqrt{t}\,|t - \alpha|}.$$

4.b. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de $]0,+\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.

4.c. Etablir la convergence absolue de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t-\alpha)}\,dt.$$

5.a. Montrer que, lorsque p tend vers $+\infty$, la suite (g_p) converge uniformément sur tout compact de $]0,+\infty[$ vers une fonction g que l'on exprimera à l'aide de l'intégrale $F(-1)$.

5.b. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = F(-1)\int_{1/n}^{n} \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

6. En utilisant les questions 2, 4 et 5, établir l'identité

$$F(-1)\,F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t-\alpha)}\,dt.$$

7. Calcul de $F(-1)$ (intégrale de Gauss).

7.a. A l'aide du changement de variable $t = u^2$, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,dt.$$

7.b. En déduire que $F(-1) = \sqrt{\pi}$.

8. Calcul de $F(i)$ (intégrale de Fresnel).

8.a. A l'aide du changement de variable $t = u^2$, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t-i)}\,dt.$$

8.b. En déduire que $F(i) = \sqrt{\pi}e^{i\pi/4}$.

II

1. Montrer que la fonction u définie sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ par $u(x,y) = e^{-ix} - y$ ne s'annule pas sur $]0,2\pi[\times]-1,+\infty[$. En déduire que, pour tout intervalle compact K contenu dans $]0,2\pi[$, pour tout entier naturel m, il existe une constante $C_{K,m}$ telle que, pour tout $(x,y)\in K\times[0,1]$, on ait

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{1}{u}\right)(x,y)\right| \le C_{K,m}.$$

Soit $x \in]0,2\pi[$.

On pose, pour tout entier naturel non nul n,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}},$$

et on rappelle les formules établies dans la première partie ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\pi} \quad ; \int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4}.$$

2. Montrer que

$$S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix-t} - e^{(n+1)(ix-t)}}{1 - e^{ix-t}} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

3. Montrer que

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{(n+1)(ix-t)}}{1 - e^{ix-t}} \frac{dt}{\sqrt{t}} \right| \leq \frac{C_{\{x\},0}}{(n+1)^{1/2}}.$$

(La notation $C_{K,m}$ a été introduite à la question 1.)

4. En déduire que la série de terme général $e^{ikx}/\sqrt{k}$ converge, et que sa somme $S(x)$ est donnée par la formule

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix-t}}{1 - e^{ix-t}} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

5. On pose, pour tout entier naturel p,

$$J_p(x) = \int_{1/p}^{p} \frac{e^{-t}}{u(x, e^{-t})} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Montrer que J_p est une fonction de classe C^∞ sur $]0, 2\pi[$, et que la suite (J_p) converge uniformément sur tout compact de $]0, 2\pi[$ ainsi que toutes ses dérivées. En conclure que la fonction S est de classe C^∞ sur $]0, 2\pi[$.

6. Soient k un entier naturel non nul et $x \in]0, 2\pi[$. Montrer que

$$\left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\, dt \right| \leq \frac{1}{2k^{3/2}} .$$

En déduire que

$$\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\, dt \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^{3/2}}.$$

7.a. Déterminer la limite, quand x tend vers 0^+, de

$$I(x) = \sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

7.b. Donner un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

III

Pour tout nombre réel m positif ou nul, on désigne par E_m l'ensemble des fonctions $a : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ de classe C^∞ telles que, pour tout entier naturel k, la quantité $t^{k+m}a^{(k)}(t)$ tende vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

1. Montrer que, si β est un nombre complexe de partie réelle strictement négative, la fonction $t \mapsto t^\beta$ appartient à E_m pour tout $m < -\mathrm{Re}(\beta)$.

2. Montrer que, si $a \in E_m$, alors $a' \in E_{m+1}$.

3. Si $a \in E_m$ on pose, pour $t \in [1, +\infty[$, $\Delta a(t) = a(t) - a(t+1)$. Montrer que la fonction Δa ainsi définie appartient à E_{m+1}.

Si $a \in E_0$, on pose, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x,

$$S_n(a, x) = \sum_{k=1}^{n} a(k)e^{ikx},$$

et on désigne par $S(a, x)$ la limite, lorsqu'elle existe, de $S_n(a, x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que si $a \in E_m$ avec $m > 1$, alors $S(a, x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier $p < m - 1$, la fonction $x \mapsto S(a, x)$ est de classe C^p sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $a \in E_0$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'identité suivante :

$$(1 - e^{-ix})S_n(a, x) = S_n(\Delta a, x) - a(1) + a(n+1)\, e^{inx}.$$

6. Déduire de la question 5 que, pour tout $a \in E_0$ et tout $x \in \,]0, 2\pi[$, la série de terme général $a(n)e^{inx}$ converge, et que l'on a

$$(1 - e^{-ix})S(a, x) = S(\Delta a, x) - a(1).$$

7. Montrer que, pour tout $a \in E_0$, la fonction $x \mapsto S(a, x)$ est de classe C^∞ sur $]0, 2\pi[$.