

Agrégation interne 94 Epreuve 1.

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. La norme du vecteur V est notée $\|V\|$. L'objectif des parties I et II est de montrer que, étant donné un entier $p \geq 1$ et des vecteurs V_1, V_2, \dots, V_p de E tels que $V_1 + V_2 + \dots + V_p = S$, il existe une permutation σ des p premiers entiers telle que, pour tout k de 1 à p , on ait : $\|V_{\sigma(1)} + \dots + V_{\sigma(k)}\| \leq \|S\| + n \cdot \sup_{1 \leq i \leq p} \|V_i\|$.

(La majoration est donc valable quel que soit le nombre p de vecteurs utilisés.)

La partie III est indépendante des deux premières ; dans la partie IV, on étudie une propriété des séries semi-convergentes par modification de l'ordre des termes.

Chaque fois qu'on utilise les coordonnées d'un point ou les composantes d'un vecteur d'un espace \mathbb{R}^p , il est sous-entendu qu'il s'agit des coordonnées ou des composantes dans la base canonique.

Propriété de l'intersection d'un sous-espace affine et d'un hypercube

Soient p et q deux entiers tels que $1 \leq q < p$ et \mathcal{A} un sous-espace affine de \mathbb{R}^p .

On dit que \mathcal{A} possède la propriété \mathcal{P}_q si \mathcal{A} contient un point A dont toutes les coordonnées appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$, q d'entre elles, au moins, valant 0 ou 1.

Soit alors \mathcal{B} un sous-espace affine de \mathbb{R}^p , de dimension q , contenant un point B dont toutes les coordonnées sont dans $[0, 1]$; on se propose de démontrer que \mathcal{B} possède la propriété \mathcal{P}_q .

1. Donner, sans démonstration, une interprétation géométrique de cette proposition, accompagnée d'une figure, dans chacun des cas suivants :

a. $p = 2$; $q = 1$.

b. $p = 3$; $q = 1$.

c. $p = 3$; $q = 2$.

2. On prend $q = 1$ et $p > q$; \mathcal{B} est donc une droite passant par B .

On désigne par (b_1, b_2, \dots, b_p) les coordonnées de B et par (u_1, u_2, \dots, u_p) les composantes d'un vecteur directeur U de \mathcal{B} .

a: Soit I l'ensemble des réels λ tels que, pour i variant de 1 à p , $b_i + \lambda u_i \in [0, 1]$. Montrer que I est égal à l'intersection non vide de p intervalles fermés de \mathbb{R} dont l'un au moins est borné et en déduire que I est un intervalle compact de \mathbb{R} .

b. Montrer qu'on peut choisir λ de telle sorte que :

Pour i de 1 à p , $b_i + \lambda u_i \in [0, 1]$ et l'un au moins de ces p nombres vaut 0 ou 1.

c. En conclure que \mathcal{B} possède la propriété \mathcal{P}_1 .

3. On suppose $q > 1$.

a. Montrer que \mathcal{B} possède la propriété \mathcal{P}_1 .

b. Montrer qu'il existe un vecteur V non nul, contenu dans la direction de \mathcal{B} , dont $q - 1$ composantes d'indices arbitrairement choisis, les $q - 1$ dernières par exemple, sont nulles. (On pourra considérer l'intersection de la direction de \mathcal{B} avec le sous-espace engendré par les $p - q + 1$ premiers vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^p).

c. On suppose que \mathcal{B} possède la propriété \mathcal{P}_m , avec $1 \leq m < q$.

En utilisant une droite passant par un point C bien choisi dans \mathcal{B} et dirigée par un vecteur V bien choisi dans la direction de \mathcal{B} , montrer que \mathcal{B} possède la propriété \mathcal{P}_{m+1} .

d. Conclure.

4. Exemple : on prend $p = 4$, $q = 2$ et on donne le tableau T :

0,1	0	-2
0,4	2	1
0,3	-1	-3
0,6	2	4

La première colonne contient les coordonnées de B ; les deux autres contiennent les composantes de deux vecteurs formant une base de la direction de \mathcal{B} . Par modifications successives du contenu de T, construire un tableau T' contenant dans sa première colonne les coordonnées d'un point de \mathcal{B} prouvant que \mathcal{B} possède la propriété \mathcal{S}_q . On se bornera à fournir les principaux tableaux intermédiaires en expliquant brièvement le passage d'un tableau au suivant.

5. Application : soit k un entier, $k > n$. V_1, V_2, \dots, V_k sont k vecteurs de E, formant un système de rang n ; W est également un vecteur de E.

On désigne par \mathcal{S} la partie de \mathbb{R}^k constituée des k -uplets de réels (x_1, x_2, \dots, x_k) tels que :

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_k V_k = W.$$

a. Montrer que \mathcal{S} est non vide.

b. Dans le cas où W est nul, montrer que \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^k et préciser sa dimension. On pourra utiliser l'application ℓ de \mathbb{R}^k dans E qui, à (x_1, x_2, \dots, x_k) , associe $x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_k V_k$.

c. Dans le cas général, montrer que \mathcal{S} est un sous-espace affine de \mathbb{R}^k .

d. On suppose que \mathcal{S} contient un k -uplet de réels appartenant tous à l'intervalle $[0, 1]$. Montrer qu'il contient aussi un k -uplet de réels de $[0, 1]$, n d'entre eux, au plus, étant différents de 0 et 1.

||

Majoration en norme d'une somme de vecteurs

A. Vecteurs de somme nulle.

1. Un exemple : on désigne par z_1, z_2, \dots, z_9 les racines, dans le corps des complexes, de l'équation $z^9 - 1 = 0$. Pour ℓ variant de 1 à 9, on associe à z_ℓ son image M_ℓ dans le plan complexe.

a. Montrer que $z_1 + z_2 + \dots + z_9 = 0$.

b. Placer les points M_1, M_2, \dots, M_9 sur une figure.

c. Déterminer une permutation σ des neuf premiers entiers telle que, pour tout entier k compris

entre 1 et 9, on ait :
$$\left\| \sum_{j=1}^{j=k} \overline{OM_{\sigma(j)}} \right\| \leq 2.$$

Dans la suite, V_1, V_2, \dots, V_p sont p vecteurs de E formant un système de rang n et tels que :

$$V_1 + V_2 + \dots + V_p = 0.$$

On rappelle que $\dim(E) = n$.

2. Montrer que $p \geq n + 1$. Vérifier que, si $p \leq 2n + 1$, on a, pour tout entier k compris entre 1 et p :

$$\|V_1 + \dots + V_k\| \leq n \cdot \sup_{1 \leq i \leq p} \|V_i\|.$$

Dans les trois questions suivantes, on se propose de généraliser cette propriété et on suppose $p > 2n + 1$.

3. On désigne par \mathcal{S}' la partie de \mathbb{R}^p constituée des p -uplets de réels (x_1, \dots, x_p) vérifiant :

$$\begin{cases} x_1 V_1 + \dots + x_p V_p = 0 \\ x_1 + \dots + x_p = n + 1. \end{cases}$$

- Montrer que \mathcal{S}' contient un p -uplet dont tous les éléments sont dans $[0, 1]$.
- Montrer que \mathcal{S}' est un sous-espace affine de \mathbb{R}^p . Quelles sont les dimensions possibles de \mathcal{S}' ?
- Montrer que \mathcal{S}' contient un p -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ de réels appartenant à $[0, 1]$, dont $n + 1$ éléments, au plus, sont différents de 0 et 1, et que dans ce p -uplet, l'un des éléments au moins vaut 1.

Pour alléger les notations, on suppose dans la suite que $\alpha_p = 1$, ce qui revient à faire une permutation sur la liste des vecteurs initiaux (V_1, \dots, V_p) .

4. a. Montrer qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{p-1}$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ tels que :

$$\begin{cases} \beta_1 V_1 + \dots + \beta_{p-1} V_{p-1} = V_1 + \dots + V_{p-1} \\ \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = n + 1. \end{cases}$$

On pourra chercher les β_i sous la forme $\beta_i = (1 - \lambda) \alpha_i + \lambda$, où λ est un réel.

b. Justifier brièvement qu'il existe des réels $\gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, l'un au moins valant 1, tels que :

$$\begin{cases} \gamma_1 V_1 + \dots + \gamma_{p-1} V_{p-1} = V_1 + \dots + V_{p-1} \\ \gamma_1 + \dots + \gamma_{p-1} = n + 1. \end{cases}$$

5. Montrer qu'il existe une permutation φ des $p - 1$ premiers entiers telle que :

$$\| V_{\varphi(1)} + V_{\varphi(2)} + \dots + V_{\varphi(p-2)} \| \leq n \cdot \sup_{1 \leq i \leq p} \| V_i \|.$$

On ne demande pas d'expliquer la suite du processus, qui permettrait, par composition des permutations utilisées, d'obtenir une permutation σ des p premiers entiers telle que, pour tout entier k entre 1 et p , on ait :

$$\| V_{\sigma(1)} + \dots + V_{\sigma(k)} \| \leq n \cdot \sup_{1 \leq i \leq p} \| V_i \|.$$

B. Cas général.

La somme $S = V_1 + \dots + V_p$ est quelconque.

1. Si le système (V_1, \dots, V_p) est encore de rang n , exhiber un système, simple, de rang n , à $(p + 1)$ vecteurs, auquel on pourrait appliquer l'étude du A. précédent. On ne demande pas comment il faudrait adapter cette étude pour obtenir une permutation σ des p premiers entiers telle que, pour tout entier k entre 1 et p , on ait :

$$\| V_{\sigma(1)} + \dots + V_{\sigma(k)} \| \leq \| S \| + n \cdot \sup_{1 \leq i \leq p} \| V_i \|.$$

2. Si le rang du système est strictement inférieur à n , le résultat précédent est-il encore valable ?

III

Parties convexes

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de E est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

On désigne toujours par n la dimension de E. On munit E de sa structure canonique d'espace affine ; un élément de E peut donc être considéré soit comme un point, soit comme un vecteur. On rappelle que la distance du vecteur \vec{u} à la partie \mathcal{P} non vide de E est la borne inférieure de l'ensemble $\{\|\vec{u} - \vec{v}\|, \vec{v} \in \mathcal{P}\}$.

On considère une partie convexe non vide \mathcal{C} de E. On suppose \mathcal{C} distincte de E ; on admettra qu'il en résulte que l'adhérence $\bar{\mathcal{C}}$ de E est également une partie convexe de E, distincte de E.

1. Montrer qu'il existe un élément \vec{u} de E dont la distance d à $\bar{\mathcal{C}}$ est strictement positive.

2. \vec{u} étant ainsi choisi, montrer qu'il existe \vec{v}_0 appartenant à $\bar{\mathcal{C}}$ tel que $\|\vec{v}_0 - \vec{u}\| = d$.

3. On suppose qu'il existe un élément \vec{v} de $\bar{\mathcal{C}}$ tel que $(\vec{v} - \vec{v}_0) \cdot (\vec{u} - \vec{v}_0) > 0$.

Montrer l'existence d'un réel λ appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ tel que $\|\vec{v}_0 + \lambda(\vec{v} - \vec{v}_0) - \vec{u}\| < d$.
On pourra étudier, au voisinage de 0, la fonction qui, au réel λ , associe $\|\vec{v}_0 - \vec{u} + \lambda(\vec{v} - \vec{v}_0)\|^2$.

En déduire que, pour tout élément \vec{v} de $\bar{\mathcal{C}}$, on a $(\vec{v} - \vec{v}_0) \cdot (\vec{u} - \vec{v}_0) \leq 0$.

4. Montrer qu'il existe un vecteur \vec{s} de E, non nul, et un réel μ , tels que, pour tout élément \vec{v} de \mathcal{C} , on ait $\vec{v} \cdot \vec{s} \leq \mu$.

IV

Modification de l'ordre des termes d'une série semi-convergente

Dans cette partie, on considère une suite $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de l'espace normé E telle que la série de terme général V_k soit convergente.

1. U est un vecteur fixé de E.

- a. Montrer que l'application de E vers \mathbb{R} qui à V associe le produit scalaire $U \cdot V$ est continue sur E.
- b. Montrer que la série de terme général (réel) $U \cdot V_k$ est convergente.

2. Montrer que l'ensemble G des vecteurs U de E tels que la série de terme général (réel) $|U \cdot V_k|$ soit convergente est un sous-espace vectoriel de E.

Jusqu'à mention du contraire, on suppose que G est réduit au vecteur nul.

3. Soit p_0 un entier positif ou nul. On désigne par \mathcal{C}_{p_0} l'ensemble des vecteurs de E qui sont combinaisons linéaires, à coefficients dans l'intervalle $[0, 1]$, de vecteurs V_k d'indice $k \geq p_0$:

$$\mathcal{C}_{p_0} = \left\{ \sum_{k=p_0}^p c_k V_k \mid p \geq p_0 \text{ et pour } p_0 \leq k \leq p, c_k \in [0, 1] \right\}.$$

a. Montrer que \mathcal{C}_{p_0} est convexe.

b. Soit U un vecteur donné de E, non nul. Montrer qu'à tout entier $p \geq p_0$, on peut associer un vecteur W_p de \mathcal{C}_{p_0} tel que :

$$\sum_{k=p_0}^p \frac{1}{2} (V_k \cdot U + |V_k \cdot U|) = W_p \cdot U.$$

Montrer que la suite $(W_p \cdot U)_{p \geq p_0}$ n'est pas majorée.

c. En déduire que $\mathcal{C}_{p_0} = E$.

4. Montrer que la suite $(\|V_p\|)_{p \geq p_0}$ est bornée (p_0 désigne toujours un entier positif ou nul). On pose :

$$\lambda(p_0) = \sup_{p \geq p_0} \{\|V_p\|\}.$$

Montrer que $\lim_{p_0 \rightarrow +\infty} \lambda(p_0) = 0$.

La suite $(\lambda(p_0))_{p_0 \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

5. Soit Γ un vecteur de E . Le but de cette question est de montrer qu'il existe une bijection ψ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telle que la série de terme général $V_{\psi(k)}$ soit convergente, avec $\sum_{k=0}^{+\infty} V_{\psi(k)} = \Gamma$.

Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on note $[a, b] = \{m \in \mathbb{N} : a \leq m \leq b\}$.

On suppose qu'on a défini une application θ strictement croissante de $[0, p]$ dans \mathbb{N} et une injection ψ de $[0, \theta(p)]$ dans \mathbb{N} telles que, pour tout entier k (s'il en existe) vérifiant $\theta(p-1) < k < \theta(p)$ on ait :

$$\left\| \Gamma - \sum_{i=0}^k V_{\psi(i)} \right\| \leq (4n+2)\lambda(p-1).$$

On suppose aussi :

$$\left\| \Gamma - \sum_{i=0}^{\theta(p)} V_{\psi(i)} \right\| \leq (n+1)\lambda(p).$$

Enfin, on note \mathcal{D} l'image de $[0, \theta(p)]$ par ψ et on suppose que $0, 1, \dots, p$ appartiennent à \mathcal{D} . On pose :

$$\Gamma - \sum_{i=0}^{\theta(p)} V_{\psi(i)} = \Gamma_1.$$

Pour $p = 1$, θ et ψ vérifiant ces propriétés existent effectivement ; on l'admettra.

a. Montrer qu'il existe un entier q , des entiers ℓ_1, \dots, ℓ_q tous différents n'appartenant pas à \mathcal{D} et des réels $x_{\ell_1}, \dots, x_{\ell_q}$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ tels que $\Gamma_1 = \sum_{i=1}^q x_{\ell_i} V_{\ell_i}$, le nombre de coefficients x_{ℓ_i} différents de 0 et 1 étant inférieur ou égal à n .

b. On note s le nombre des entiers ℓ_i tels que $x_{\ell_i} = 1$ et on pose $\theta(p+1) = \theta(p) + s + 1$. Si s est non nul, on suppose en outre que ℓ_1, \dots, ℓ_q ont été rangés de sorte que $x_{\ell_1} = \dots = x_{\ell_s} = 1$ et on prolonge ψ en posant $\psi(\theta(p)+1) = \ell_1, \dots, \psi(\theta(p)+s) = \ell_s$; montrer que, si ℓ_1, \dots, ℓ_s ont été convenablement rangés, on a, pour tout k de 1 à s :

$$\left\| \sum_{i=\theta(p)+1}^{\theta(p)+k} V_{\psi(i)} \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^s V_{\ell_i} \right\| + n\lambda(p); \quad \left\| \Gamma_1 - \sum_{i=\theta(p)+1}^{\theta(p)+k} V_{\psi(i)} \right\| \leq 2\|\Gamma_1\| + 2n\lambda(p)$$

et

$$\left\| \Gamma - \sum_{i=0}^{\theta(p)+k} V_{\psi(i)} \right\| \leq (4n+2)\lambda(p).$$

c. On prolonge ψ en prenant pour $\psi(\theta(p+1))$ le plus petit entier tel que ψ soit injective. Montrer que les propriétés supposées vérifiées par θ et ψ au rang p le sont aussi par leurs prolongements au rang $p+1$.

d. Conclure brièvement.

6. On suppose dans cette question que G n'est pas réduit au vecteur nul et on désigne par G^\perp son supplémentaire orthogonal.

Pour tout entier p , on définit les vecteurs V'_p et V''_p par :

$$V_p = V'_p + V''_p, \quad V'_p \in G, \quad V''_p \in G^\perp.$$

- a. Montrer que la série de terme général (réel) $\|V'_p\|$ est convergente.

On admet alors le résultat suivant : pour toute bijection φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , la série de terme général $V'_{\varphi(p)}$

est convergente et $\sum_{p=0}^{\infty} V'_{\varphi(p)} = \sum_{p=0}^{\infty} V'_p$.

- b. Montrer que la série de terme général V''_p est convergente.

- c. Soit \mathcal{D} l'ensemble des vecteurs Γ de E tels qu'il existe une bijection ψ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} pour laquelle la série de terme général $V_{\psi(p)}$ est convergente, de somme Γ .

Montrer que \mathcal{D} est un sous-espace affine de E . Préciser sa direction.