NJ 2

J. 6038

SESSION DE 1993

concours interne de recrutement de professeurs agrégés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : mathématiques

deuxième épreuve de mathématiques

Durée : 6 heures

Calculatrice de poche, y compris programmable et alphanumérique, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-828, du 28 juillet 1986.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Tournez la page S.V.P.

Le problème a pour objet d'étudier certaines propriétés et certaines utilisations de la **transformation de Laplace.**

$\mathscr{E}$ désigne l'ensemble des applications f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $f \in \mathscr{E}$, on pose $\mathrm{F}(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t$ et on note $\mathscr{A}_f$ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{F}(z)$ soit une intégrale absolument convergente.

$\mathscr{F}$ désigne l'ensemble des $f \in \mathscr{E}$ telles que $\mathscr{A}_f \neq \varnothing$.

Pour $f \in \mathscr{F}$, F s'appelle **transformée de Laplace** de f et on note $\mathrm{F} = \mathscr{L}_f$.

Les parties **III** *et* **IV** *sont indépendantes.*

I

Dans cette partie, on se propose d'expliciter les transformées de Laplace de certaines applications f.

1.*a.* Soit $f \in \mathscr{F}$. Montrer que si $z_0 = x_0 + iy_0$ appartient à $\mathscr{A}_f$, il en est de même de tout $z = x + iy$ tel que $x \geqslant x_0$.

b. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathscr{A}_f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{F}_n(z) = \displaystyle\int_0^n e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite de fonctions (F_n) converge uniformément vers F dans le demi-plan Π_{x_0} défini par :

$$\Pi_{x_0} = \{z = x + iy, \quad x \geqslant x_0\}.$$

En déduire la continuité de F dans ce demi-plan.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose dans cette question que $f(t) = t^n$.

a. Montrer que $\mathscr{A}_f$ est l'ensemble des $z = x + iy$ tels que $x > 0$.

b. Pour tout $z \in \mathscr{A}_f$, expliciter $\mathrm{F}(z)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$. On suppose dans cette question que $f(t) = t^n e^{-at}$.

a. Déterminer $\mathscr{A}_f$.

b. Pour tout $z \in \mathscr{A}_f$, expliciter $\mathrm{F}(z)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette question que $f(t) = t^n e^{-at} e^{i\omega t}$.

a. Déterminer $\mathscr{A}_f$.

b. Pour tout $z \in \mathscr{A}_f$, expliciter $\mathrm{F}(z)$.

c. En déduire l'expression, lorsque $z \in \mathscr{A}_f$, des intégrales :

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \cos\omega t\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{J}_0 = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-zt} \cos\omega t\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{J}_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-zt} \sin\omega t\,\mathrm{d}t.$$

II

Dans cette partie, on se propose d'établir certaines propriétés de la transformation de Laplace.

1. Soit $f \in \mathscr{F}$ continue sur $[0, +\infty[$ et soit $s \in \mathscr{A}_f$ et $a > 0$. Montrer que :
$$\mathrm{F}(s + a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t)\, \mathrm{d}t \text{ où, pour tout } t \in [0, +\infty[,\ g(t) = \int_0^t e^{-su} f(u)\, \mathrm{d}u.$$

2. Sous les mêmes conditions, montrer que, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathrm{F}(s + na) = 0$, alors on peut établir successivement les résultats suivants :

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) u^n \,\mathrm{d}u = 0$ (où ln désigne le logarithme népérien).

   b. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $g(t) = 0$.

3. En déduire que, si $f \in \mathscr{F}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et telle que, pour tout $z \in \mathscr{A}_f$, $\mathscr{L}_f(z) = \mathrm{F}(z) = 0$, alors pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f(t) = 0$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathscr{E}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

   (i) f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0, +\infty[$;

   (ii) pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, $f^{(k)} \in \mathscr{F}$;

   (iii) pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ et tout $z \in \mathscr{A}_{f^{(k)}}$, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} e^{-zt} f^{(k)}(t) = 0$.

   Montrer qu'alors, pour tout $z \in \displaystyle\bigcap_{k=0}^{n} \mathscr{A}_{f^{(k)}}$, on a l'égalité :
$$\mathscr{L}_{f^{(n)}}(z) = z^n \mathscr{L}_f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1} f^{(k)}(0).$$

III

Dans cette partie, on se propose, à l'aide de la transformation de Laplace, de retrouver certains résultats classiques concernant les fonctions « gamma » (notée Γ) et « bêta » (notée B) respectivement définies par :
$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t$$
$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\, \mathrm{d}u.$$

1. Montrer que l'intégrale $\Gamma(z)$ converge absolument pour tout $z = x + iy$ tel que $x > 0$.

2. Pour tout réel $s > 0$ et tout réel $k > -1$, exprimer, au moyen de la fonction Γ, $\mathscr{L}_f(s)$ où $f(t) = t^k$. Comparer le résultat obtenu avec celui du **I.2**.

3. Déterminer l'ensemble des couples (α, β) de réels tels que l'intégrale $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ converge.

4. g et h étant deux applications appartenant à $\mathscr{E}$ et continues sur $[0, +\infty[$, on considère l'application f définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$f(t) = \int_0^t g(u)\, h(t-u)\, \mathrm{d}u.$$

   On peut démontrer, **et on admettra,** que, pour tout réel s tel que les intégrales $\mathscr{L}_g(s)$ et $\mathscr{L}_h(s)$ convergent absolument, il en est de même de l'intégrale $\mathscr{L}_f(s)$ qui vérifie alors l'égalité :
$$\mathscr{L}_f(s) = \mathscr{L}_g(s) \cdot \mathscr{L}_h(s).$$

Tournez la page S.V.P.

En déduire les résultats suivants :

a. Pour tout couple (α, β) de réels tels que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

b. Pour tout réel α tel que $0 < \alpha < 1$, on a :

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha).$$

5. Soit w la fonction périodique de période 2π définie, pour $x \in]-\pi, \pi]$ par :

$$w(x) = \cos \alpha x$$

où α est un réel tel que $0 < \alpha < 1$.

a. Calculer les coefficients de Fourier de w.

b. Montrer que $\dfrac{\pi}{\sin \pi \alpha} = \dfrac{1}{\alpha} + 2\alpha \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2}$.

c. Montrer que $B(\alpha, 1 - \alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\, dt$, puis que $B(\alpha, 1 - \alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} + t^{-\alpha}}{1+t}\, dt$.

d. En déduire que $\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi \alpha}$.

IV

Dans cette partie, on se propose, à l'aide de la transformation de Laplace, de résoudre une équation différentielle et un système différentiel. On pourra utiliser à cet effet les parties **I** et **II**.

1. On considère l'équation différentielle :

$$(1) \qquad \begin{cases} u''' - 5u'' + 8u' - 4u = t \cos t \\ u''(0) = u'(0) = u(0) = 1. \end{cases}$$

On pose $U = \mathscr{L}_u$.

a. Exprimer $U(z)$ sous forme de fractions rationnelles en z.

b. En déduire la solution u de (1) sur $\mathbb{R}$.

2. On considère le système différentiel :

$$(2) \qquad \begin{cases} 2u'' + v'' + 2u = 0 \\ u'' + v'' + v = 0 \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^*,\ u'(0) = v(0) = v'(0) = 0. \end{cases}$$

On pose $U = \mathscr{L}_u$ et $V = \mathscr{L}_v$.

a. Exprimer $U(z)$ et $V(z)$ sous forme de fractions rationnelles en z.

b. En déduire la solution (u, v) de (2) sur $\mathbb{R}$.

IMPRIMERIE NATIONALE.