deuxième épreuve de mathématiques

Durée : 6 heures

Tout document et tout dictionnaire interdits.

L'usage des calculatrices de poche, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé pour cette épreuve conformément à la circulaire n° 86-828 du 28 juillet 1986.

La précision des démonstrations et la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

PREMIÈRE PARTIE

Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle :

$$(E_0) \qquad 3(x^2 + x)\,y'' + (8x + 3)\,y' + 2y = 0$$

dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x.

1.1. Rechercher pour (E_0) une solution développable en série entière autour de 0, et vérifiant la condition $y(0) = 1$.

On précisera l'intervalle I sur lequel la fonction f obtenue est solution de (E_0).

1.2. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles. On remarquera que f est la restriction à I d'une fonction $x \longmapsto (1 + x)^\alpha$ pour un choix convenable de α.

1.3. En exploitant les résultats précédents, déterminer toutes les solutions de (E_0). On en donnera l'expression au moyen des fonctions usuelles.

DEUXIÈME PARTIE

Comparaison d'une série et d'une intégrale

Dans cette partie, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres complexes et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite de ses sommes partielles :

$$S_0 = 0 \qquad \forall\, n, n \geq 1, \qquad S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}.$$

On suppose dans les questions 2.1. à 2.4. que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

2.1. Prouver que, si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes est convergente, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$ est $+\infty$.

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n x^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n x^n}{n!} \text{ convergent.}$$

2.2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{B}(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n x^n}{n!}$.

Justifier la dérivabilité de la fonction B et prouver que l'on a :

$$\mathrm{B}(x) = \int_0^x e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n t^n}{n!}\, dt.$$

2.3. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, convergente et de limite L. Prouver que l'on a :

$$\lim_{x \to \infty} \left[e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} \right] = \mathrm{L}.$$

a. Dans le cas $\mathrm{L} = 0$ d'abord.

b. Étendre la propriété au cas L quelconque.

2.4. Prouver l'égalité :

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n t^n}{n!}\, dt.$$

2.5. On suppose, dans cette question, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ divergente.

Prouver que l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n t^n}{n!}\, dt$ peut cependant avoir un sens.

On pourra utiliser à cet effet une suite géométrique.

La suite du problème consiste à montrer par l'étude d'un exemple que, lorsqu'on connaît une solution d'une équation différentielle sous forme d'une série entière :

$$x \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

admettant un certain rayon de convergence R, il peut se produire que, pour certaines valeurs de x supérieures à R, l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n t^n}{n!} \, dt$ converge et fournisse un prolongement de la solution initialement obtenue.

TROISIÈME PARTIE

Soit l'équation différentielle :

(E) $$3(x^2 + x) y'' + (7x + 2) y' + y = 0$$

dans laquelle y désigne une fonction numérique inconnue de la variable réelle x.

3.1. Soit $x_0 > 0$ et soient $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ quelconques.
Justifier l'existence et l'unicité d'une solution f de l'équation (E) sur l'intervalle $]0, \infty[$, vérifiant les conditions

$$f(x_0) = y_0 \qquad f'(x_0) = y_1 .$$

3.2. Rechercher pour (E) une solution développable en série entière autour de 0, et telle que $y(0) = 1$.
On notera $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la solution obtenue, dont on précisera le rayon de convergence.

3.3. On pose pour tout x réel $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$. Légitimer la définition de G et vérifier que G est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

(E_1) $$3xy'' + (3x + 2) y' + y = 0 .$$

3.4. Prouver que l'on a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \, G(xt) \, dt .$$

QUATRIÈME PARTIE

Étude d'une suite de fonctions

4.1. Montrer que l'application N, de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2, \qquad N(X, Y) = \left(X^2 + \frac{1}{2} Y^2\right)^{1/2}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Dans toute la suite, si $V = (X, Y)$ est un élément de $\mathbb{R}^2$, on utilisera les notations $N(X, Y) = \| V \|$ ou $N(X, Y) = \| (X, Y) \|$.

4.2. À tout réel t non nul, on associe l'endomorphisme L_t de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique est donnée par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3t} & \dfrac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit k un réel strictement supérieur à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Montrer qu'il existe un réel t_0 strictement positif tel que :

$$\forall\, t,\, t \geq t_0, \qquad \forall\, (X, Y), \qquad (X, Y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \| L_t(X, Y) \| \leq k \| (X, Y) \|.$$

Dans les questions suivantes, k et t_0 sont fixés ainsi.

4.3. Soit $V_0 = (a, b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$. On lui associe la suite des fonctions $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, par les relations suivantes :

$$\forall\, t \in [t_0, \infty[, \qquad Z_0(t) = V_0\,; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad Z_n = (X_n, Y_n)\,;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall\, t \in [t_0, \infty[, \qquad X_{n+1}(t) = a + \int_{t_0}^{t} \left[-\frac{2}{3\lambda} X_n(\lambda) + \frac{1}{4} Y_n(\lambda) \right] d\lambda$$

$$Y_{n+1}(t) = b + \int_{t_0}^{t} X_n(\lambda)\, d\lambda.$$

Prouver que, $\forall t,\ t \geq t_0, \qquad \| Z_1(t) - Z_0(t) \| \leq k(t - t_0) \| V_0 \|$

et que $\forall\ n \geq 1, \qquad \forall\, t,\, t \geq t_0, \qquad \| Z_{n+1}(t) - Z_n(t) \| \leq k \displaystyle\int_{t_0}^{t} \| Z_n(\lambda) - Z_{n-1}(\lambda) \|\, d\lambda.$

4.4. En déduire que, $\forall t,\ t \geq t_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > p$, on a :

$$\| Z_n(t) - Z_p(t) \| \leq \| V_0 \| \sum_{m=p+1}^{n} \frac{k^m (t - t_0)^m}{m!}$$

et que la suite Z_n converge uniformément sur tout intervalle $[t_0, t_1]$, pour $t_1 \in\,]t_0, \infty[$; on désigne par Z sa limite.

CINQUIÈME PARTIE

5.1. Effectuer dans (E1) le changement de fonction inconnue

$$y(x) = z(x) \cdot \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

On appellera (E2) l'équation différentielle obtenue, dont z est la fonction inconnue.

5.2. Soit l'équation (E3), dont l'inconnue est une fonction :

$$t \longrightarrow \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} \quad \text{de } \mathbb{R}^{+*} \text{ vers } \mathbb{R}^2$$

(E3) $$\begin{bmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \end{bmatrix} = A(t) \cdot \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}$$

où A (t) désigne la matrice définie en 4.2.

Soient $t_0 > 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution de (E3), sur l'intervalle $]0, \infty[$ satisfaisant aux conditions $X(t_0) = a$, $Y(t_0) = b$.

5.3. On reprend les notations de la partie 4. Montrer que, sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, la fonction Z est solution de (E3).

5.4. En utilisant ce qui précède, déterminer pour toute solution sur l'intervalle $]0, \infty[$ de (E1) une fonction de type exponentiel la majorant au voisinage de $+\infty$. On commencera par comparer les solutions de (E2) et de (E3).

5.5. Prouver que, pour $x \in [1, 2+2\sqrt{2}[$, l'intégrale figurant dans l'égalité 3.4. a un sens.

5.6. Prouver que, pour tous x_1, x_2 tels que $0 < x_1 < x_2 < 2 + 2\sqrt{2}$, il existe $\delta > 0$, $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, M_1, M_2 tels que :

$$\forall x \in [x_1, x_2] \ , \ \forall t \geq t_1 \ , \ e^{-t} | G'(xt) | \leq M_1 \exp(-\delta t)$$
$$\forall x \in [x_1, x_2] \ , \ \forall t \geq t_2 \ , \ e^{-t} | G''(xt) | \leq M_2 \exp(-\delta t) .$$

Prouver alors que :

$$x \longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-t} G(xt) \, dt$$

est solution de (E) sur $]-1, 2+2\sqrt{2}[$.