première épreuve de mathématiques

Durée : 6 heures

Tout document et tout dictionnaire interdits.

L'usage des calculatrices de poche, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé pour cette épreuve, conformément à la circulaire n° 86-828, du 28 juillet 1986.

NOTATIONS

Dans ce problème $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et n est un entier non nul.

Soit A une matrice. On note ${}^{t}A$ sa matrice transposée, $A_{i,j}$ le coefficient de sa i-ème ligne et j-ème colonne et AB son produit par la matrice B. Si x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on le considère comme une matrice à une colonne, en particulier ${}^{t}x$ est une matrice à une seule ligne. On note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par ${}^{t}e_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^n)$ où $\delta_i^i = 1$ et $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$. $\mathcal{E} = (e_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$ est donc la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On note $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des $(n \times n)$-matrices à coefficients réels et I_n la matrice identité de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $x \longrightarrow Ax$ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ noté encore A. Par ailleurs, on pose $A^0 = I_n$ et on définit la matrice A^i pour $i \geqslant 1$ par la relation de récurrence $A^{i+1} = A^i A$. Le polynôme $P(t) = \det(t\, I_n - A)$ est appelé *polynôme caractéristique* de la matrice A.

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note I_V l'endomorphisme identité de V. Soit a un endomorphisme de V, on note $a \circ b$ son composé avec l'endomorphisme b, on note $a \cdot x$ l'image par a du vecteur x de V et on note $a(E)$ l'image par a du sous-espace vectoriel E, d'autre part on définit pour tout entier i un endomorphisme a^i par $a^0 = I_V$ et par la relation de récurrence $a^{i+1} = a^i \circ a$.

Si $\mathcal{E}$ est une base de V, on note Mat $(a, \mathcal{E})$ la matrice de l'endomorphisme a de V dans la base $\mathcal{E}$. Le déterminant de la matrice Mat $(a, \mathcal{E})$, qui ne dépend pas de la base $\mathcal{E}$, sera noté det (a). Le polynôme $P(t) = \det(t\, I_V - a)$ sera appelé *polynôme caractéristique* de a.

Un polynôme sera dit unitaire si le coefficient de son terme de plus grand degré est égal à 1. On remarquera qu'un polynôme caractéristique est toujours unitaire. Si P est un polynôme à coefficients réels, on appelle racine de P tout nombre *complexe* qui annule P. Le *polynôme minimal* d'un endomorphisme a est le polynôme unitaire de plus petit degré P tel que $P(a) = 0$.

Partie I

On dit qu'un endomorphisme r d'un espace vectoriel V est une pseudo-réflexion si l'endomorphisme $r - \mathrm{I}_\mathrm{V}$ est de rang 1.

1. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit r une pseudo-réflexion de V et soit K le noyau de l'endomorphisme $r - \mathrm{I}_\mathrm{V}$.

   a. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel K ?

   b. Soit $\mathscr{E}$ une base de K et u un vecteur de V qui n'appartient pas à K. Montrer que $\mathscr{E} \cup \{u\}$ est une base de V. Écrire la matrice de l'endomorphisme r dans cette base et montrer que le vecteur $r \cdot u - \det(r) u$ appartient à K.

   c. On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathrm{P}(t) = (t-1)(t - \det(r))$ est le polynôme minimal de l'endomorphisme r. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme r soit diagonalisable.

   d. On suppose $n = 2$. Caractériser, selon les valeurs de son déterminant, la nature géométrique de la pseudo-réflexion r.

2. À tout polynôme unitaire $\mathrm{P}(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ à coefficients réels, on associe l'endomorphisme M_P de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\begin{cases} \mathrm{M}_\mathrm{P} \cdot e_i = e_{i+1} & \text{pour } 1 \leqslant i < n ; \\ \mathrm{M}_\mathrm{P} \cdot e_n = -(a_n e_1 + a_{n-1} e_2 + \dots + a_2 e_{n-1} + a_1 e_n) . \end{cases}$$

   a. Calculer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme M_P. Montrer que :

$$\mathrm{M}_\mathrm{P}^n + a_1 \mathrm{M}_\mathrm{P}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \mathrm{M}_\mathrm{P} + a_n \mathrm{I}_n = 0 .$$

   b. Soit Q un polynôme unitaire à coefficients réels, de degré n, distinct de P et tel que $\mathrm{Q}(0) \neq 0$. Montrer que l'endomorphisme M_Q de $\mathbb{R}^n$ est inversible et que $\mathrm{M}_\mathrm{Q}^{-1} \circ \mathrm{M}_\mathrm{P}$ est une pseudo-réflexion.

Partie II

1. Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et soit P son polynôme caractéristique.

   a. À tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$ on associe l'endomorphisme X_v de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathrm{X}_v \cdot e_i = \mathrm{A}^{i-1} \cdot v .$$

   Calculer $\mathrm{X}_v \mathrm{M}_\mathrm{P} \cdot e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ puis $\mathrm{X}_v \mathrm{M}_\mathrm{P} \cdot e_n$.

   b. On pose :

$$\mathrm{C}_\mathrm{A} = \{ \mathrm{X} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) ;\ \mathrm{X} \mathrm{M}_\mathrm{P} = \mathrm{A} \mathrm{X} \} .$$

   Montrer que X_v appartient à C_A et que $\dim \mathrm{C}_\mathrm{A} \geqslant n$.

2. *a.* On pose :

$$\mathscr{T} = \{ \mathrm{X} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) ;\ \mathrm{X}_{i,j} = \mathrm{X}_{i+1,j+1} \text{ pour } 1 \leqslant i,j \leqslant n-1 \} .$$

   Vérifier que $\mathscr{T}$ est un espace vectoriel et calculer sa dimension.

   b. Soit X une matrice telle que ${}^t\mathrm{M}_\mathrm{P} \mathrm{X} \mathrm{M}_\mathrm{P} = \mathrm{X}$. Montrer que X appartient à $\mathscr{T}$.

3. On dira que le polynôme P à coefficients réels, unitaire, de degré n, est *réciproque* s'il vérifie la relation $t^n\,\mathrm{P}(1/t) = \mathrm{P}(0)\,\mathrm{P}(t)$ pour tout nombre réel t non nul.

   a. Caractériser les polynômes réciproques d'abord à partir de leurs coefficients puis à partir de l'ensemble de leurs racines, avec multiplicité.

   b. Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique P réciproque. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice ${}^t\mathrm{A}^{-1}$. En déduire que :

$$\mathrm{C}_{{}^t\mathrm{M}_\mathrm{P}^{-1}} = \{\mathrm{X} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})\,;\ {}^t\mathrm{M}_\mathrm{P}\,\mathrm{X}\,\mathrm{M}_\mathrm{P} = \mathrm{X}\}.$$

4. Soit P et Q deux polynômes unitaires réciproques de degré n.

   a. Montrer qu'il existe une matrice X de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle et telle que :

$${}^t\mathrm{M}_\mathrm{P}\,\mathrm{X}\,\mathrm{M}_\mathrm{P} = {}^t\mathrm{M}_\mathrm{Q}\,\mathrm{X}\,\mathrm{M}_\mathrm{Q} = \mathrm{X}. \qquad (*)$$

   b. Montrer qu'il existe une matrice X de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, symétrique ou antisymétrique, qui vérifie la condition (*).

   c. Trouver explicitement une matrice symétrique X vérifiant (*) dans le cas où $\mathrm{P}(t) = t^3 + 5t^2 - 5t - 1$ et $\mathrm{Q}(t) = t^3 + 4t^2 + 4t + 1$ (on pourra utiliser la forme bilinéaire symétrique associée à la matrice X).

Partie III

On considère un espace vectoriel V de dimension finie n et deux automorphismes a et b de V tels que l'automorphisme $b^{-1} \circ a$ soit une pseudo-réflexion. On note P (respectivement Q) le polynôme caractéristique de a (respectivement b) et W le noyau de l'endomorphisme $b - a$.

1. Quelle est la dimension de W ?

2. Soit E un sous-espace vectoriel de V, non réduit à $\{0\}$, tel que :

$$a(\mathrm{E}) = b(\mathrm{E}) = \mathrm{E}.$$

   a. Soit a' la restriction de a à E. Que peut-on dire du polynôme caractéristique de a' ?

   b. On suppose que l'espace vectoriel E est contenu dans W. Montrer que les polynômes P et Q ne sont pas premiers entre eux.

   c. On suppose que l'espace vectoriel E est distinct de V et n'est pas contenu dans W. Soit $\mathscr{E}$ une base de E. Montrer qu'il existe une famille $\mathscr{F}$ non vide de vecteurs de W telle que $\mathscr{E} \cup \mathscr{F}$ soit une base de V. Comparer l'écriture des matrices $\mathrm{Mat}(a, \mathscr{E} \cup \mathscr{F})$ et $\mathrm{Mat}(b, \mathscr{E} \cup \mathscr{F})$ et en déduire que les polynômes P et Q ne sont pas premiers entre eux.

   d. Que peut-on dire si les polynômes P et Q sont premiers entre eux ?

3. On suppose maintenant que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

   a. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $a^{-j}(\mathrm{W})$? Montrer que l'espace vectoriel $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{n-2} a^{-j}(\mathrm{W})$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

   b. Soit v un vecteur non nul de $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{n-2} a^{-j}(\mathrm{W})$. Montrer que les vecteurs $a^j \cdot v\ (0 \leqslant j \leqslant n-1)$ forment une base $\mathscr{E}$ de V (on pourra considérer l'espace vectoriel E qu'ils engendrent et montrer que, si $\dim \mathrm{E} < n$, alors $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{W}$).

   c. Montrer que $\mathrm{Mat}(a, \mathscr{E}) = \mathrm{M}_\mathrm{P}$ et $\mathrm{Mat}(b, \mathscr{E}) = \mathrm{M}_\mathrm{Q}$.

   d. On suppose que $\mathrm{P} = t^n - 1$ et $\mathrm{Q} = t^n + 1$. En examinant l'action de a et b sur les vecteurs de la base $\mathscr{E}$ et sur leurs opposés, montrer que le groupe G engendré par a et b est fini.

Partie IV

On reprend les notations de la partie III et on suppose en outre que les polynômes P et Q sont réciproques et premiers entre eux.

1. *a.* Vérifier que les résultats obtenus dans les parties II et III prouvent l'existence d'une forme bilinéaire sur V, non nulle, symétrique ou antisymétrique et vérifiant pour tous vecteurs x et y de V :

$$f(a\cdot x,\ a\cdot y) = f(b\cdot x,\ b\cdot y) = f(x, y).$$

   b. En considérant l'ensemble E des vecteurs u de V tels que $f(u, x) = 0$ pour tout vecteur x de V, montrer que la forme f est non dégénérée.

   c. Montrer que toute forme linéaire définie sur V peut s'exprimer au moyen de f.

2. On note p l'endomorphisme (de rang 1) $b^{-1} \circ a - \mathrm{I_V}$.

   a. Montrer qu'il existe des vecteurs v et w, non nuls, de V tels que :

$$p\cdot x = f(v, x)w. \qquad (**)$$

   b. Vérifier que $c = \det(b^{-1} \circ a) = \mathrm{P}(0)/\mathrm{Q}(0) = \pm 1$. En utilisant I. 1. *c.*), montrer que $p^2 + (1-c)p = 0$.

   c. Calculer $f(p\cdot x + x,\ p\cdot y + y)$ directement puis en utilisant les propriétés d'invariance de f. Montrer que $c\,f(w, w)\,v + f(v, w)\,w = 0$.

3. *a.* On suppose f antisymétrique. Montrer que $\det(a) = \det(b)$.

   b. On suppose f symétrique. Montrer que $\det(a) \neq \det(b)$ (on pourra remarquer que, si $c = 1$, $f(v, x)\,f(w, x) = 0$ et $(f(v, x))^2\,f(w, y) = 0$ pour tout x et y). Montrer qu'il existe un vecteur u de V tel que $p\cdot x = \pm\, f(u, x)u$.

   c. Discuter la symétrie de f selon l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de l'un des polynômes P ou Q.

4. On suppose qu'il existe une forme bilinéaire symétrique f non dégénérée et un vecteur u, non nul, tels que $p\cdot x = -f(u, x)u$.

   a. Vérifier que :

$$\mathrm{I_V} + p \circ (\mathrm{I_V} - tb^{-1})^{-1} = b^{-1} \circ (a - t\mathrm{I_V}) \circ b \circ (b - t\mathrm{I_V})^{-1}.$$

   b. Soit ℓ une forme linéaire sur V et L l'endomorphisme de V défini par $\mathrm{L}\cdot x = \ell(x)u$. Montrer que $\det(\mathrm{I_V} + \mathrm{L}) = 1 + \ell(u)$.

   En déduire que :

$$\frac{\mathrm{P}(t)}{\mathrm{Q}(t)} = 1 - f(u, (\mathrm{I_V} - tb^{-1})^{-1}\cdot u).$$

5. En plus des hypothèses de la question 4., on suppose que les racines de Q sont toutes réelles et simples. On note S l'ensemble de ces racines.

   a. Montrer qu'il existe une famille de vecteurs $\{u_\lambda\}_{\lambda \in \mathrm{S}}$ telle que :

$$b\cdot u_\lambda = \lambda u_\lambda \quad \text{et} \quad u = \sum_{\lambda \in \mathrm{S}} u_\lambda.$$

   b. Soient λ et μ des éléments de S tels que $\lambda\mu \neq 1$. Montrer que $f(u_\lambda, u_\mu) = 0$.

   c. Montrer que, pour tout réel t non dans S, on a :

$$\frac{\mathrm{P}(t)}{\mathrm{Q}(t)} = 1 - \sum_{\lambda \in \mathrm{S}} f(u_{1/\lambda}, u_\lambda)/(1 - t\lambda^{-1}).$$

   En déduire que, pour tout λ dans S, on a :

$$f(u_\lambda, u_{1/\lambda}) = -\frac{\mathrm{P}(\lambda)}{\lambda \mathrm{Q}'(\lambda)}.$$

6. Dans cette question on suppose que le groupe d'endomorphismes G de V engendré par a et b est fini. On suppose en outre que les racines des polynômes P et Q sont simples. On choisit une base $\mathscr{E}$ de V et on note $V_{\mathbb{C}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base $\mathscr{E}$. On note $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) l'endomorphisme de $V_{\mathbb{C}}$ défini par $\mathrm{Mat}(\bar{a}, \mathscr{E}) = \mathrm{Mat}(a, \mathscr{E})$ (resp. $\mathrm{Mat}(\bar{b}, \mathscr{E}) = \mathrm{Mat}(b, \mathscr{E})$).

a. Montrer que les racines de Q sont des racines de l'unité.

b. Soient $\{e_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ les vecteurs de la base $\mathscr{E}$. On définit sur $V_{\mathbb{C}}$ un produit scalaire par la formule :

$$< \sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{i=1}^{n} y_i e_i > = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i .$$

Montrer que l'application $f : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$f(x, y) = \sum_{g \in G} < g \cdot x, g \cdot y >$$

est un produit scalaire sur $V_{\mathbb{C}}$ et que, pour tous vecteurs x et y de V et tout endomorphisme h de G, on a $f(h \cdot x, h \cdot y) = f(x, y)$.

Vérifier que $P(0)Q(0) = -1$.

c. Quitte à échanger les rôles de P et Q, on suppose $Q(0) = -1$. Montrer que les fonctions $h(t) = e^{-int/2} P(e^{it})$ et $k(t) = ie^{-int/2} Q(e^{it})$ prennent des valeurs réelles lorsque la variable t est réelle. Montrer que la fonction k est périodique de période 4π, qu'elle s'annule $2n$ fois sur chaque période en changeant de signe à chaque fois.

d. À chaque valeur propre λ de $\bar{b}$ on associe un vecteur propre u_λ dans $V_{\mathbb{C}}$ de telle sorte que $u = \sum_{\lambda \in S} u_\lambda$.

En s'inspirant des calculs de 5., montrer que, pour toute valeur propre $\lambda = e^{i\alpha}$ de $\bar{b}$, $h(\alpha)/k'(\alpha)$ est un réel négatif.

e. Montrer que les racines des polynômes P et Q sont entrelacées sur le cercle unité, c'est-à-dire que, lorsqu'on parcourt le cercle unité dans le sens trigonométrique, on rencontre alternativement une racine de P et une racine de Q.