XN 1

J. 2232

session de 1990

concours interne et concours d'accès à l'échelle de rémunération des professeurs agrégés

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

L'usage des calculatrices de poche, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé pour cette épreuve conformément à la circulaire n° 86-828, du 28 juillet 1986.

Notations

Dans tout le problème, on désigne par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées de taille n à éléments réels. Si A est un élément de $\mathscr{M}_n$, la notation $A = [a_{ij}]$ signifie que a_{ij} est le terme de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j de A. On dit que A est *nilpotente* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. La matrice A est dite *triangulaire supérieure stricte* si $a_{ij} = 0$ pour $i \geqslant j$.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathscr{L}(E)$ désigne la $\mathbb{R}$-algèbre des endomorphismes de E, et id_E l'application identique de E. Pour u, v éléments de $\mathscr{L}(E)$, on note uv le composé $u \circ v$. Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, u^i est l'endomorphisme de E défini par la formule de récurrence $u^{i+1} = u^i u$, avec $u^0 = \mathrm{id}_E$. On dit que u est *nilpotent* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, sa dimension est notée dim E. Étant donnés un endomorphisme u de E, et $\mathscr{E}$ une base de E, on désigne par $\mathrm{Mat}(u; \mathscr{E})$ la matrice de u dans la base $\mathscr{E}$.

Il est rappelé qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n'admet pas nécessairement de valeur propre.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE I

1. Dans toute cette question, n désigne un entier strictement positif. Pour tout élément $A = [a_{ij}]$ de $\mathscr{M}_n$, la *trace* $\mathrm{tr}(A)$ de A est définie par :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_n$ qui vérifient $\mathrm{tr}(A) = 0$.

a. Prouver que $\mathscr{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$. Quelle est sa dimension ? ESC ?

b. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n$. Prouver que la matrice $AB - BA$ appartient à $\mathscr{S}_n$.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et u un endomorphisme de E. Prouver que le nombre réel :

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}\Big(\mathrm{Mat}(u;\mathscr{E})\Big)$$

est indépendant de la base $\mathscr{E}$ de E choisie pour le définir. Ce nombre réel sera appelé la *trace* de l'endomorphisme u. ESC ?!

c. Pour i et j éléments de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$, on note M_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_n$ dont le terme de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j est égal à 1, les autres termes de M_{ij} étant nuls.

Soient i et j des entiers distincts de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$. Calculer les matrices :

AH $$M_{ij}M_{ji} - M_{ji}M_{ij} \qquad \text{et} \qquad M_{ii}M_{ji} - M_{ji}M_{ii}.$$

d. Soit φ une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_n$ vérifiant :

$$\varphi(AB) = \varphi(BA)$$

pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_n$.

Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que :

$$\varphi(A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A)$$? ESC ?!

pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n$.

2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n, et u un endomorphisme nilpotent de E.

a. Prouver que u n'est pas surjectif. ESC ?!

b. Soient H un hyperplan de E contenant l'image de u, et $\mathscr{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E telle que $(e_1, ..., e_{n-1})$ soit une base de H.

Que peut-on dire de $\mathrm{Mat}(u;\mathscr{E})$?

En raisonnant par récurrence sur la valeur de l'entier n, prouver qu'il existe une base $\mathscr{F}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u;\mathscr{F})$ soit triangulaire supérieure stricte.

c. Montrer que l'on a $\mathrm{tr}(u^p) = 0$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$.

3. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n, et u un endomorphisme de E tel que $\operatorname{tr}(u^p) = 0$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$.

   a. Prouver que u n'est pas surjectif (on pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton). (?)

   b. En raisonnant comme dans la question I.2.*b.*, montrer qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de E telle que $\operatorname{Mat}(u;\mathscr{E})$ soit triangulaire supérieure stricte.

   c. Prouver que l'endomorphisme u est nilpotent.

3H

4. Énoncer le résultat démontré dans les questions I.2. et I.3.

PARTIE II

Si u et v sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on pose :

$$[u\,,v] = uv - vu.$$

On appelle *quaterne* tout quadruplet $Q = (u\,,v\,,w\,,E)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, et où u, v et w sont des endomorphismes de E vérifiant :

$$[u\,,v] = 2v,\quad [u\,,w] = -2\,w,\quad [v\,,w] = u.$$

Deux quaternes $Q = (u\,,v\,,w\,,E)$ et $Q' = (u', v', w', E')$ sont dits *équivalents* s'il existe des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ de E et E' telles que :

$$\operatorname{Mat}(u;\mathscr{E}) = \operatorname{Mat}(u';\mathscr{E}'),\quad \operatorname{Mat}(v;\mathscr{E}) = \operatorname{Mat}(v';\mathscr{E}'),\quad \operatorname{Mat}(w;\mathscr{E}) = \operatorname{Mat}(w';\mathscr{E}').$$

Soit $Q = (u\,,v\,,w\,,E)$ un quaterne.

On note $\mathscr{T}(Q)$ l'ensemble $\{u\,,v\,,w\}$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est $\mathscr{T}(Q)$-stable si $f(x) \in F$ pour tout vecteur $x \in F$ et tout élément $f \in \mathscr{T}(Q)$. S'il en est ainsi, et si F est non réduit à $\{0\}$, on définit un quaterne $Q_F = (u_F, v_F, w_F, F)$ en notant respectivement u_F, v_F, w_F les restrictions de u, v, w à F.

Le quaterne Q est dit *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels $\mathscr{T}(Q)$-stables de E sont $\{0\}$ et E.

1. Soient r un entier strictement positif, E_r un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension r, et $\mathscr{E}_r = (e_1, ..., e_r)$ une base de E_r. On définit des endomorphismes u_r, v_r et w_r de E_r par les formules suivantes :

$$u_r(e_i) = (r - 2i + 1)e_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$
$$v_r(e_1) = 0, \quad \text{et} \quad v_r(e_i) = (i-1)(r-i+1)e_{i-1} \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant r.$$
$$w_r(e_r) = 0, \quad \text{et} \quad w_r(e_i) = e_{i+1} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r-1.$$

   a. Prouver que $Q^r = (u_r, v_r, w_r, E_r)$ est un quaterne.

   b. Soit x un élément non nul de E_r. Montrer qu'il existe un entier $s \in \mathbb{N}$ tel que le vecteur $(w_r)^s(x)$ soit non nul et colinéaire à e_r.

   En déduire que le quaterne Q^r est irréductible.

4H

Tournez la page S.V.P.

2. Soient f, g, h des endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Établir la formule :
$$[f, gh] = [f, g]\, h + g[f, h]\,.$$

3. Soit $\mathrm{Q} = (u\,,\, v\,,\, w\,, \mathrm{E})$ un quaterne.

a. Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$[u, v^p] = 2p\, v^p\,, \quad [u, w^p] = -\,2p\, w^p.$$

b. En déduire que v et w sont des endomorphismes nilpotents de E. ?

c. Pour p entier strictement positif, établir les formules :
$$[w, v^p] = -\,p\Big(u - (p-1)\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\Big)v^{p-1}\,, \quad [v, w^p] = p\Big(u + (p-1)\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\Big)w^{p-1}\,.$$

4. Soit $\mathrm{Q} = (u,\, v,\, w,\, \mathrm{E})$ un quaterne. On note r le plus petit entier strictement positif tel que $v^r = 0$ (un tel entier existe d'après la question II.3.*b*.).

a. Soit z un vecteur de E tel que $y = v^{r-1}(z)$ soit non nul. Montrer que :
$$v(y) = 0, \quad u(y) = (r-1)\,y\,.$$

b. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$x_p = w^{p-1}(y)\,.$$
Montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$u(x_p) = (r - 2p + 1)\, x_p\,.$$
Prouver qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$$x_s \neq 0, \quad \text{et} \quad x_k = 0 \quad \text{pour} \quad k > s.$$
$\boxed{\text{ESC}}$?

c. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que :
$$v(x_p) = (p-1)(r-p+1)\, x_{p-1}\,.$$

d. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_s$, où s est l'entier défini à la question II.4.*b*.
Prouver que F est de dimension s et est $\mathcal{T}(\mathrm{Q})$-stable.
ESC?

e. Montrer que la trace de la restriction de u à F est égale à :
$$s(r-s)\,.$$
En déduire que $s = r$, puis que le quaterne $\mathrm{Q}_{\mathrm{F}} = (u_{\mathrm{F}},\, v_{\mathrm{F}},\, w_{\mathrm{F}},\, \mathrm{F})$ est équivalent au quaterne Q^r défini à la question II.1.

f. Que peut-on dire si le quaterne Q est irréductible ?

PARTIE III

Pour tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on désigne par E* l'espace vectoriel dual de E. Si $f \in E^*$, et si $x \in E$, on note $< f, x >$ pour $f(x)$. Pour $u \in \mathscr{L}(E)$, ${}^t u$ désigne l'endomorphisme transposé de u. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, les endomorphismes $({}^t u)^p$ et ${}^t(u^p)$ sont égaux; on les notera ${}^t u^p$. Si G est un sous-espace vectoriel de E*, l'orthogonal $G^\perp$ de G est le sous-espace vectoriel de E constitué des vecteurs $x \in E$ tels que $< f, x > = 0$ pour tout $f \in G$.

1. Soit $Q = (u, v, w, E)$ un quaterne. Prouver que $Q^* = (-{}^t u, -{}^t v, -{}^t w, E^*)$ est un quaterne.

2. On reprend dans cette question les notations de la question II.4. : $Q = (u, v, w, E)$ est un quaterne, r est le plus petit entier strictement positif tel que $v^r = 0$, z est un vecteur de E tel que $y = v^{r-1}(z)$ soit non nul, et F est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $x_p = w^{p-1}(y)$ pour $1 \leqslant p \leqslant r$.

De plus, on note Q^* le quaterne $(-{}^t u, -{}^t v, -{}^t w, E^*)$, et on fixe un élément h de E* tel que $< h, y > = 1$. On pose $g = {}^t v^{r-1}(h)$, et on note G le sous-espace vectoriel de E* engendré par les vecteurs $f_p = (-{}^t w)^{p-1}(g)$ pour $1 \leqslant p \leqslant r$.

a. Vérifier que g est non nul. Prouver que F est $\mathscr{T}(Q)$-stable, que G est $\mathscr{T}(Q^*)$-stable, et que les quaternes Q_F et Q^*_G sont irréductibles et équivalents.

b. Soient k et p des entiers de l'ensemble $\{1, 2, ..., r\}$. Établir les formules :

$$< f_k, x_{r-k+1} > = (-1)^{k-1}\big((r-1)!\big)^2, \quad < f_k, x_p > = 0 \quad \text{si} \quad p + k > r + 1 .$$

c. Prouver que l'orthogonal $G^\perp$ de G est $\mathscr{T}(Q)$-stable, et que c'est un supplémentaire de F dans E.

d. Montrer qu'il existe un entier $s \in \mathbb{N}^*$, et des sous-espaces vectoriels non nuls $F_1, ..., F_s$ de E vérifiant les conditions suivantes :

i. $E = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_s$.

ii. Pour $1 \leqslant i \leqslant s$, F_i est $\mathscr{T}$ (Q)-stable.

iii. Pour $1 \leqslant i \leqslant s$, le quaterne Q_{F_i} est irréductible, et équivalent au quaterne Q^{r_i}, où r_i est la dimension de F_i.

Tournez la page S.V.P.

3. Soit $Q = (u, v, w, E)$ un quaterne. On considère deux décompositions :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_s = F'_1 \oplus F'_2 \oplus \ldots \oplus F'_t$$

où $F_1, \ldots, F_s, F'_1, \ldots, F'_t$ sont des sous-espaces vectoriels non nuls et $\mathcal{T}(Q)$-stables de E, les quaternes $Q_{F_1}, \ldots, Q_{F_s}, Q_{F'_1}, \ldots, Q_{F'_t}$, étant irréductibles.

Pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, on note U_i le sous-espace propre de u pour la valeur propre i.

a. Prouver que la dimension de U_0 (resp. U_1) est égale au nombre d'indices i tels que F_i soit de dimension impaire (resp. paire).

En déduire que $s = t$.

b. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, soit n_k le nombre d'indices i tels que F_i soit de dimension k. Établir la formule :

$$n_k = \dim U_{k-1} - \dim U_{k+1}.$$

En déduire qu'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, s\}$ telle que, pour $1 \leqslant i \leqslant s$, les quaternes Q_{F_i} et $Q_{F'_{\sigma(i)}}$ soient équivalents.

PARTIE IV

Dans toute cette partie, $Q = (u, v, w, E)$ est un quaterne. On désigne par $F_1, \ldots, F_s$ des sous-espaces vectoriels non nuls de E, $\mathcal{T}(Q)$-stables, vérifiant $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_s$, et tels que les quaternes Q_{F_i}, $1 \leqslant i \leqslant s$, soient irréductibles.

On note $\mathscr{C}$ la sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ constituée des endomorphismes θ de E qui vérifient :

$$[u, \theta] = [v, \theta] = [w, \theta] = 0.$$

1. Montrer que si Q est irréductible, on a $\mathscr{C} = \mathbb{R}\, \mathrm{id}_E$.

2. Soient θ un élément de $\mathscr{C}$, et i un entier appartenant à $\{1, 2, \ldots, s\}$.

Prouver que $\theta(F_i)$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{T}(Q)$-stable de E. Montrer que si $\theta(F_i)$ est non nul, les quaternes Q_{F_i} et $Q_{\theta(F_i)}$ sont équivalents.

3. On définit un endomorphisme Δ de E par la formule :

$$\Delta = u^2 + 2\,vw + 2\,wv.$$

a. Soient j un entier appartenant à $\{1, 2, \ldots, s\}$, et x un vecteur de F_j. Prouver que l'on a :

$$\Delta(x) = \left((\dim F_j)^2 - 1\right) x.$$

En déduire que Δ est un élément de $\mathscr{C}$.

b. On suppose dans cette question que les dimensions des F_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, sont deux à deux distinctes.

Soient θ un élément de $\mathscr{C}$, et i un entier appartenant à $\{1, 2, \ldots, s\}$. Montrer que $\theta(F_i) \subset F_i$. En déduire que l'espace vectoriel $\mathscr{C}$ est de dimension s.

4. Donner un exemple où $\mathscr{C}$ n'est ni de dimension 1, ni de dimension s.