Agrégation de mathématiques

Concours interne
Deuxième épreuve

6537. *L'usage des calculatrices de poche, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé pour cette épreuve conformément à la circulaire n° 86-828 du 28 juillet 1986.*

La précision des démonstrations et la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

RAPPELS.

1° Une solution u d'une équation différentielle définie sur un intervalle $]a, b[$ est dite maximale si, et seulement si, il n'existe pas de solution définie sur un intervalle ouvert contenant strictement $]a, b[$ dont la restriction à $]a, b[$ coïncide avec u.

2° Pour une fonction f bornée sur $[a, b]$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a, b]} (|f(x)|)$.

3° La notation de Landau $f(x) = O(g(x))$ (pour x tend vers $+\infty$) signifie :

$$\exists C > 0, \ \exists X, \ \forall x > X, \qquad |f(x)| \leqslant C|g(x)|.$$

Soit E l'équation différentielle $y' = x + y^2$.

Dans tout le problème, on se limite à étudier cette équation pour des valeurs strictement positives de x.

Cette équation, qui intervient dans diverses questions concrètes, ne peut pas être intégrée en termes de fonctions élémentaires.

L'objet du problème est d'étudier certaines propriétés de ses solutions, d'abord d'un point de vue qualitatif, essentiellement local pour **I.**, et **II.**, global pour **III.**, puis d'un point de vue quantitatif au **IV**.

I

1° Soit φ et ψ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ telles que $\forall x, \forall y, \varphi(x, y) < \psi(x, y)$ et soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur un intervalle $]a, b[$, à valeurs réelles, telles que u soit solution de l'équation différentielle $u'(x) = \varphi(x, u(x))$, v de l'équation $v'(x) = \psi(x, v(x))$ et qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $u(c) = v(c)$.

Comparer pour x appartenant à $]a, b[$ les valeurs de $u(x)$ et $v(x)$. (On montrera qu'il existe un voisinage de c sur lequel c est le seul zéro de $v - u$ et on montrera que $d = \inf\{x > c \mid u(x) = v(x)\}$ ne peut pas exister.)

2° Déterminer la solution maximale de l'équation $z'(t) = \gamma^2 + z^2(t)$ (où γ est une constante strictement positive) qui vérifie $z(t_0) = 0$ $(t_0 > 0)$.

3° Soit $]\alpha, \beta[$ l'intervalle de définition de la solution maximale f de E qui vérifie $f(x_0) = 0$.

Montrer que β est fini, que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers β, que, si $\alpha > 0$, $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers α et que, si $x_0 > 3$, $\alpha > 0$. (Pour l'étude de β, on pourra comparer f avec la fonction étudiée au **I. 2°** pour $\gamma^2 = x_0 - \varepsilon$ et $t_0 = x_0$.)

4° De façon plus précise, montrer que si l'on étudie la dépendance de α et β par rapport à x_0, $\beta - x_0$ et $x_0 - \alpha$ sont équivalents à $\dfrac{\pi}{2\sqrt{x_0}}$ lorsque x_0 tend vers $+\infty$ (adapter la méthode suggérée en **I. 3°** ; pour l'étude de α on pourra utiliser, lorsqu'elle existe, une valeur strictement positive de γ telle que $\gamma^2 \leqslant x_0 - \dfrac{\pi}{2\gamma}$).

5° Faire un croquis sommaire montrant l'allure des solutions.

II

1° ***a)*** Soit u et v deux fonctions positives continues sur $[0, 1]$ telles que

$$u(0) = v(0) = 0$$

et que $u(x)$ soit équivalente à $v(x)$ lorsque x tend vers zéro. Montrer que

$$\mathrm{U}(x) = \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(x) = \int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t$$

sont équivalentes lorsque x tend vers zéro.

b) Soit u et v deux fonctions positives continues sur $[\alpha, \beta[$ telles que $u(x)$ soit équivalente à $v(x)$ lorsque x tend vers β et que l'intégrale $\int_\alpha^\beta u(t)\,\mathrm{d}t$ soit divergente. Montrer que

$$\mathrm{U}(x) = \int_\alpha^x u(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(x) = \int_\alpha^x v(t)\,\mathrm{d}t$$

sont équivalentes lorsque x tend vers β. Que peut-on dire lorsque $\int_\alpha^\beta u(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ?

2° Déterminer une équation différentielle E′ telle qu'une fonction g soit solution de E′ si, et seulement si, sur tout intervalle où g ne s'annule pas, $\dfrac{1}{g}$ est solution de E.

Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale f_1 de l'équation E, définie sur un intervalle de la forme $]\alpha, a[$ telle que $f_1(x)$ tende vers $+\infty$ lorsque x tend vers a, et de même une unique solution maximale f_2, définie sur un intervalle $]a, \beta[$ telle que f_2 tende vers $-\infty$ lorsque x tend vers a.

Déterminer un équivalent simple de f_1 (resp. f_2) au voisinage de a.

3° f_1 et f_2 étant définies comme ci-dessus, on note f_a la fonction définie sur $]\alpha, \beta[\setminus\{a\}$ par

$$f_a|_{]\alpha, a[} = f_1, \qquad f_a|_{]a, \beta[} = f_2$$

(où $|$ note la restriction). Montrer qu'il existe une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et un réel λ tels que, sur un voisinage convenable de a,

$$f_a(x) = \frac{\lambda}{x - a} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - a)^k.$$

On déterminera explicitement λ, a_0, a_1, a_2 et on donnera une formule de récurrence exprimant a_n en fonction de $a_0, \ldots, a_{n-1}$. (On ne cherchera pas à expliciter a_n.)

Déterminer, en fonction de a, un minorant du rayon de convergence de la série entière.

Déterminer, en fonction de a, un majorant du rayon de convergence de la série entière.

Calculer numériquement les coefficients a_0 à a_{10} lorsque $a = 5$ puis $a = 50$. (Les résultats seront présentés dans un tableau.) Dans ces deux cas, calculer $\sqrt[10]{a_{10}}$. Commenter les résultats.

III

On appellera solution généralisée de l'équation E une fonction g définie sur le complémentaire $\mathrm{G} = \mathbb{R}^+\setminus\mathrm{S}$ dans $\mathbb{R}^+$ d'un ensemble S (éventuellement vide) de points isolés telle que, en tout point de G, g soit solution de E et que au voisinage de tout point a de S la fonction g coïncide avec la fonction f_a du type étudié en **II. 3°** (L'ensemble S peut dépendre de la fonction g.)

1° Montrer que pour tout $x > 0$, il existe une solution généralisée g et une seule de E telle que $g(x) = 0$.

2° Soit u une solution généralisée de E de domaine de définition G. Soit s et c les deux fonctions définies sur G par

$$s(x) = \frac{2u(x)\sqrt{x}}{x + u^2(x)}, \qquad c(x) = \frac{x - u^2(x)}{x + u^2(x)}.$$

Montrer que, pour tout x, $e(x) = c(x) + is(x)$ est de module 1.

Montrer que les fonctions s et c sont bornées et admettent des prolongements de classe $\mathscr{C}^1$ à $\mathbb{R}^{+*}$.

Montrer qu'il existe une fonction θ de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$ $\exp(i\theta(x)) = e(x)$ (on pourra déterminer $\theta'(x)$).

Montrer que

$$\tan\left(\frac{\theta(x)}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{x}} \quad \text{(tan désigne la fonction tangente).}$$

Montrer que

$$\theta(x) = \frac{4}{3}x^{3/2} + \mathrm{O}(\ln(x))$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Retrouver à l'aide de ces résultats certains des résultats de **I**.

3° Soit p une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que l'ensemble des zéros d'une solution maximale y ($y \neq 0$) de l'équation différentielle $y'' + py = 0$ n'a pas de point d'accumulation.

En déduire que l'ensemble des zéros de y positifs peut être indexé en une suite (éventuellement finie ou vide) strictement croissante.

4° Montrer, à l'aide de l'équation E″ déduite de E par le changement de fonction inconnue $y = -\dfrac{z'}{z}$ que toute solution généralisée de E peut s'exprimer de façon globale comme quotient de deux séries entières de rayon de convergence infini.

Montrer que, si z est solution de E″, entre deux zéros consécutifs de z il y a un zéro et un seul de z' et que entre deux zéros consécutifs de z' il y a un zéro et un seul de z.

Montrer que z est bornée $\left(\text{étudier } z^2 + \dfrac{z'^2}{x}\right)$.

5° Soit p et q deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x$, $p(x) < q(x)$ et u (resp. v) avec u et $v \neq 0$ une solution de l'équation

$$u'' + pu = 0 \quad (\text{resp. } v'' + qv = 0).$$

Montrer en étudiant $u'v - uv' = w$ qu'entre deux zéros consécutifs de u il y a un zéro de v.

Retrouver par cette méthode certains des résultats de **I**.

IV

Soit φ une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et u une solution de l'équation différentielle $y'(x) = \varphi(x, y(x))$ définie sur une intervalle $[a, b]$. On rappelle que la méthode d'Euler pour déterminer une approximation de u connaissant la valeur initiale $u(a)$ consiste à subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles en posant $h = (b - a)/n$, $x_i = a + ih$ ($i = 0, \dots, n$) et à construire une suite y_k définie par $y_0 = u(a)$, $y_{k+1} = y_k + h\varphi(x_k, y_k)$. Les y_k sont des valeurs approchées des $u(x_k)$. Le but des questions qui suivent est d'étudier l'erreur $e_k = y_k - u(x_k)$ et plus particulièrement le comportement de e_n (l'erreur sur $u(b)$) lorsque n tend vers $+\infty$.

On suppose que l'équation est telle que pour tout n et pour tout k les y_k restent dans un intervalle fixe $[-\mathrm{B}, +\mathrm{B}]$.

On négligera les erreurs dues aux limitations de précision dans les calculs en virgule flottante. $x_{n+1} \leqslant \mathrm{K}x_n + \mathrm{L}$. Déterminer un majorant de x_n en fonction de x_0, n, K et L.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$ déterminer la limite de $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2° Montrer que les e_k vérifient une relation de récurrence de la forme

$$e_{k+1} = e_k(1 + h\alpha_k) + h^2(\beta_k + \gamma_k)$$

où α_k et β_k sont des coefficients bornés qu'on exprimera en fonction des dérivées de φ ou u, et γ_k est tel qu'il existe une constante M telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \leqslant n : \ |\gamma_k| < \mathrm{M}h.$$

Montrer qu'il existe une constante C telle qué $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k < n$: $|e_k| < \mathrm{C}h$.

3° On pose $A_k = 1 + h\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_k, u(x_k))$. Montrer que

$$e_n = h^2[\beta_{n-1} + A_{n-1}\beta_{n-2} + A_{n-1}A_{n-2}\beta_{n-3} + A_{n-1}A_{n-2}A_{n-3}\beta_{n-4} \dots + A_{n-1} \dots A_1\beta_0] + h^2[r_{n-1} + A_{n-1}r_{n-2} + \cdots + A_{n-1}A_{n-2} \dots A_1 r_0]$$

où r_k est tel qu'il existe une constante M′ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \leqslant n : |r_k| < M'h$.

Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire h tend vers zéro)

$$r_{n-1} + A_{n-1}r_{n-2} + \cdots + A_{n-1}A_{n-2} \dots A_1 r_0$$

reste borné.

4° On se propose de montrer que e_n admet un développement asymptotique de la forme

$$e_n = \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

pour cela, dans une première étape, on pourra montrer que $T_{n,k} = A_{n-1}A_{n-2} \dots A_{n-k+1}$ admet pour n tendant vers $+\infty$ un développement asymptotique dont le reste peut être majoré indépendamment de k. On rappelle que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - h\left(\frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)\right| \leqslant \frac{h^2}{12}(b - a)\|f''\|_\infty .$$

Conclure, en déterminant la valeur de c (il serait vain de chercher à calculer les intégrales qui figurent dans son expression).

5° Montrer qu'une combinaison convenable des approximations de $u(b)$ obtenues par la méthode d'Euler pour $n = p$ et pour $n = 2p$ fournit une méthode de calcul approché de $u(b)$ dont l'erreur ε_p vérifie

$$\varepsilon_p = O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

6° Décrire avec précision une méthode permettant de calculer une approximation de la valeur pour $x = 5$ de la solution généralisée u de l'équation E qui s'annule pour $x = 3$ avec contrôle de l'erreur ε commise sur $u(5)$.

N.B. — L'énoncé contient les informations nécessaires pour plusieurs méthodes ; le candidat choisira celle qui lui paraîtra la plus efficace, sans avoir à justifier les raisons qui déterminent ce choix.

7° Faire les calculs décrits en **IV. 6°** avec, si possible, $\varepsilon < 10^{-3}$.

Le corrigé de la question 6537 paraîtra dans la RMS n° 9, mai 1990.