ministère
Éducation
nationale

EAI MAT 2

SESSION 2014

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

NOTATIONS ET RAPPELS

- ▷ $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
- ▷ $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbf{R}^{+*}$ l'ensemble des nombres réels positifs non nuls.
- ▷ $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
- ▷ $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- ▷ $\mathbf{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.
- ▷ $\mathbf{C}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes.
- ▷ Si $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{C}_n[X]$ désigne le sous espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$, des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n.
- ▷ Pour deux réels a, b vérifiant $a \leqslant b$, on désigne par $[a, b]$ l'intervalle fermé d'extrémités a et b. $C([a,b], \mathbf{C})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbf{C}$. On notera en particulier C^0 l'ensemble des fonctions à valeurs complexes continues sur $[0,1]$ et C^1 l'ensemble des fonctions à valeurs complexes de classe C^1 sur $[0,1]$. Pour $g \in C^0$, on pose $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$.
- ▷ Pour tous entiers naturels p et q vérifiant $p \leqslant q$, l'ensemble $\{n \in \mathbf{N} \ / \ p \leqslant n \leqslant q\}$ est noté $[\![p, q]\!]$.
- ▷ Si $(k, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial dont la valeur est $\begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$
- ▷ On rappelle que si $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite complexe, $\sum\limits_{k\in\varnothing} u_k = 0$.

Notations

- ▷ **Dans tout le problème,** f désigne une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs complexes.
- ▷ Pour $(k,n) \in \mathbf{N}^2$ on appelle k-ème polynôme de Bernstein d'ordre n le polynôme $B_{k,n}$ donné par :

$$B_{k,n}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

- ▷ On considérera dans ce problème un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On rappelle qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Bernoulli si $X(\Omega) = \{0,1\}$. On dit que $p \in [0,1]$ est le paramètre de cette loi si $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X^{-1}\{1\}) = p$.
- ▷ On considérera $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires, réelles, indépendantes et identiquement distribuées suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre x, où $x \in [0,1]$.

  Pour n entier naturel non nul on notera $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \frac{S_n}{n}$.
- ▷ Pour X variable aléatoire réelle, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ son espérance mathématique et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.
- ▷ Soit $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et Y des variables aléatoires réelles, de fonctions de répartition respectives F_k et F. On rappelle que $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers Y si, en tout point x où F est continue, la suite $(F_k(x))_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers $F(x)$.
- ▷ Soit $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et Y des variables aléatoires réelles. On dit que $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge en moyenne quadratique vers Y si la suite $(\mathbb{E}((Y_k - Y)^2))_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Partie I : Une démonstration probabiliste du théorème de Weierstrass

1. Donner, en la justifiant, la loi de S_n.
2. Déduire de ce premier résultat les propriétés suivantes (seules des démonstrations utilisant la question précédente seront acceptées ici) :

   (a) $\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in \mathbf{N}, 0 \leqslant B_{k,n}(x) \leqslant 1$,

(b) $\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in \mathbf{N}, B_{k,n}(x) = B_{n-k,n}(1-x)$,

(c) et les valeurs de :

i. $\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x)$,

ii. $\sum_{k=0}^{n} kB_{k,n}(x)$,

iii. $\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 B_{k,n}(x)$.

3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$ calculer $\mathbb{P}(S_n = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(S_{n-1} = k)$ et $\mathbb{P}(S_{n-1} = k-1)$, et en déduire l'expression de $B_{k,n}$ en fonction de $B_{k,n-1}$ et $B_{k-1,n-1}$.

4. Pour $n > 0$, on définit une application B_n de C^0 vers $\mathbf{C}[X]$ par

$$\forall g \in C^0, \quad B_n(g) = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n}.$$

(a) Montrer que $(B_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

(b) Montrer que la restriction de B_n à $\mathbf{C}_n[X]$ induit un automorphisme linéaire $\overline{B}_n$ de $\mathbf{C}_n[X]$.

(c) Montrer que

$$\forall P \in \mathbf{C}[X], \exists Q \in \mathbf{C}[X], \exists n \in \mathbf{N}, P = B_n(Q).$$

Un tel Q est-il unique ?

5. On rappelle ici que $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, que $T_n = \frac{S_n}{n}$ et que les variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre x.
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(f(T_n)) = B_n(f)(x)$$

puis que

$$B_n(f)(x) - f(x) = \mathbb{E}(f(T_n) - f(\mathbb{E}(T_n))).$$

6. Montrer que $\forall \delta > 0, \mathbb{P}(|T_n - x| \geqslant \delta) \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$.

7. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans un ensemble fini et φ une fonction définie et convexe sur un intervalle contenant $X(\Omega)$. On suppose de plus que X et $\varphi(X)$ possèdent une espérance. Montrer qu'alors

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

8. Déduire de ce qui précède que $(B_n(f))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers f.

9. Démontrer le théorème de Weierstrass :
Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$. Si g est continue sur $[a,b]$, alors g est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.

10. Montrer que ce résultat n'est pas valable si on remplace $[a,b]$ par $\mathbf{R}$.

Partie II : Approximation des fonctions Hölderiennes

Soit $\alpha \in]0,1]$. Une fonction g, définie sur $[0,1]$ et à valeurs complexes, est dite α-Hölderienne sur $[0,1]$ si il existe $L > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad \left|g(x) - g(y)\right| \leqslant L\left|x-y\right|^{\alpha}.$$

Notons Lip_α l'ensemble des fonctions α-Hölderiennes sur $[0,1]$.

A) Généralités sur les fonctions Hölderiennes

11. Soit $\alpha \in]0,1]$. Montrer que la fonction g définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ par $g(x) = x^\alpha$ est α-Hölderienne puis que Lip_α est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

12. Soit α et β deux réels tels que $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$. Montrer que $Lip_\beta \subset Lip_\alpha$. En déduire que l'ensemble des $\alpha \in]0,1]$ tels qu'une fonction est α-hölderienne sur $[0,1]$ est soit vide soit un sous-ensemble convexe de $]0,1]$.

13. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1]$,

$$C^1 \subset Lip_\alpha \subset C^0.$$

Les inclusions précédentes sont-elles strictes ? Justifier votre réponse.

B) Une majoration de l'erreur

Pour $L > 0$ considérons l'ensemble

$$Lip_\alpha(L) = \left\{g : [0,1] \to \mathbf{C}, \forall (x,y) \in [0,1]^2, |g(x) - g(y)| \leqslant L|x-y|^\alpha\right\}.$$

14. Montrer que pour tout $g \in Lip_\alpha(L)$, la suite de terme général $B_n(g)$ converge uniformément vers g.

On s'intéresse alors à une majoration de l'erreur commise lorsqu'on remplace $g \in Lip_\alpha(L)$ par son approximation $B_n(g)$.

15. Démontrer que si $g \in Lip_\alpha(L)$ alors, pour tout $x \in [0,1]$, on a $\left|g(x) - B_n(g)(x)\right| \leqslant L\mathbb{E}(|x - T_n|^\alpha)$

16. Inégalité de Hölder.

(a) Soit g une fonction définie sur $\mathbf{R}^+$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ et strictement concave (i.e. vérifiant : $\forall x \neq y \in \mathbf{R}^+, \forall \alpha \in]0,1[, g(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y)$) et soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^{+*}$ par

$$h(x,y) = yg\left(\frac{x}{y}\right).$$

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{R}^+)^n$ et tout $(y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbf{R}^{+*})^n$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} h(x_i, y_i) \leqslant h\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y_i\right),$$

avec égalité si, et seulement si, les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{R}^+)^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbf{R}^{+*})^n$ sont proportionnels.

(b) Soit p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Déduire de ce qui précède que pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ et pour tout $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k v_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

À quelle condition y a-t-il égalité dans l'inégalité précédente ?

17. Montrer que

$$\mathbb{E}(|x-T_n|^\alpha) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n}|x-\frac{k}{n}|^2\mathbb{P}(T_n=\frac{k}{n})\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(T_n=\frac{k}{n})\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

en déduire que $\mathbb{E}(|x-T_n|^\alpha) \leqslant \left(\mathbb{E}|x-T_n|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}$.

18. En déduire que si $g \in Lip_\alpha(L)$ alors $\|g-B_n(g)\|_\infty \leqslant L\left(\frac{1}{4n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$.

19. Notons $e_n(L,\alpha) = \sup\limits_{f\in Lip_\alpha(L)} \|f-B_n(f)\|_\infty$. Montrez que $e_n(L,\alpha) = O(n^{-\frac{\alpha}{2}})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie III : Approximation de la dérivée par les polynômes de Bernstein

Dans cette partie, après avoir souligné l'absence de lien entre convergence uniforme et régularité de la fonction limite, nous montrons que si f est une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$, alors la suite $\left(B_n(f)'\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f'.

20. *Un premier contre-exemple, où l'on considère une suite de fonctions dérivables $(k_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergeant uniformément vers une fonction k.*
On considère donc la suite $(k_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $\forall n\in\mathbf{N}^*, \forall x\in\mathbf{R}, k_n(x) = x\arctan(nx)$

- **(a)** Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers une fonction k à déterminer.
- **(b)** Montrer que $\forall x\in\mathbf{R}^*, |k_n(x)-k(x)| \leqslant \left|x\arctan(\frac{1}{nx})\right|$ et montrer que $(k_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers k sur $\mathbf{R}$.
- **(c)** Conclure cette question.

21. *Un second contre-exemple, où l'on considère une suite de fonctions dérivables $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant uniformément vers une fonction dérivable q.*
On considère ici la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbf{N}, \forall x\in[0,1], q_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$. Montrer que l'on définit ainsi une suite de fonctions pour laquelle la limite de la suite des fonctions dérivées n'est pas égale à la dérivée de la limite.

22. Soit φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = x^4(1-x)+x(1-x)^4$. Démontrer que :

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad x^4(1-x)+x(1-x)^4 \leqslant \frac{1}{12}.$$

(On pourra remarquer que, pour tout $h\in\mathbf{R}$, $\varphi\left(\frac{1}{2}+h\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}-h\right)$).

23. On souhaite, dans cette question, montrer que $\mathbb{E}((T_n-x)^4) \leqslant \frac{1}{12n^3}+\frac{3(n-1)}{16n^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

- **(a)** Si $(\alpha_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de réels, montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^4 = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^4 + 6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i^2\alpha_j^2 + \sum_{(i_1,i_2,i_3,i_4)\in I}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\alpha_{i_3}\alpha_{i_4}$$

  où I est un ensemble d'indices à déterminer.

- **(b)** Montrer que :

$$n^4\mathbb{E}((T_n-x)^4) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}((X_k-x)^4) + 6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbb{E}((X_i-x)^2(X_j-x)^2)$$

(c) Montrer que $\mathbb{E}((X_k - x)^4) \leqslant \frac{1}{12}$ et $\mathbb{E}((X_i - x)^2(X_j - x)^2) \leqslant \frac{1}{16}$, pour tout $(i,j,k) \in [\![0,n]\!]^3, i \neq j$.

(d) Conclure.

24. **(a)** Si $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer $B'_{k,n}$ en fonction de $B_{k-1,n-1}$ et $B_{k,n-1}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

(b) Montrer que $B_n(f)$ est dérivable sur $[0,1]$ et que

$$B_n(f)' = n \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n}) \right) B_{k,n-1}$$

25. Dans la suite de cette partie nous supposerons que f est dérivable en un point $x_0 \in [0,1]$.

(a) Dans les cas où $x_0 \in \{0,1\}$, montrer que $\left((B_n(f))'(x_0)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $f'(x_0)$.

(b) Dans le reste de cette question nous considérerons que $x_0 \in]0,1[$.

i. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1], g(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0).$$

On définit alors pour tout $y \in [0,1]$, $g_1(y) = yg(y)$ et $g_2(y) = (1-y)g(y)$. Montrer que

$$\forall x \in]0,1[, B_n(g)'(x) = \frac{n}{x(1-x)} \left((1-x)B_n(g_1)(x) - xB_n(g_2)(x)\right)$$

ii. En déduire que

$$B_n(g)' = \frac{\mathbb{E}\left((T_n - x)g(T_n)\right)}{\mathbb{V}(T_n)}.$$

iii. Montrer que $\left(B_n(g)'(x_0)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 0.

iv. Montrer que $\left(B_n(f)'(x_0)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $f'(x_0)$.

Partie IV : Courbes et estimateur de Bézier

A) Géométrie des courbes de Bézier

Définition : Pour $n \in \mathbf{N}$, $t \in [0,1]$ et $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, $(n+1)$ nombres complexes distincts, on définit le nombre $G(t)$ par $G(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t)P_k$. En assimilant tout point du plan à son affixe complexe, on appelle courbe de Bézier associée aux points de contrôle $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ le lieu des points $G(t)$ quand t varie dans $[0,1]$.

26. Quelle est la courbe de Bézier associée à un point de contrôle ? A deux points de contrôle ?

27. Vérifier que la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ contient P_0 et P_n.

28. Montrer que la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, $(n \leqslant 2)$, est une portion de droite si et seulement si les points $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont alignés.

29. Montrer que la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ admet une tangente en chacun de ses points, que sa tangente en P_0 est (P_0P_1) et que sa tangente en P_n est $(P_{n-1}P_n)$.

30. Montrer que la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est dans l'enveloppe convexe de $\{P_k, 0 \leqslant k \leqslant n\}$.

31. Soit α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et soit $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ $n+1$ nombres complexes tels que

$$P_0 = \alpha, \quad P_n = \beta + i, \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \mathrm{Re}(P_k) < \mathrm{Re}(P_{k+1}).$$

On considère C, la courbe de Bézier associée à ces nombres complexes et, pour $t \in [0,1]$, on pose $G_n(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t)P_k$.

(a) Montrer que la courbe C passe par les points d'affixe α et $\beta + i$.

(b) Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{Re}(G_n(t))$ est dérivable et strictement croissante sur $[0, 1]$.

(c) En déduire que l'application $t \mapsto \mathrm{Re}(G_n(t))$ est un C^1-difféomorphisme de $[0, 1]$ sur $[\alpha, \beta]$.

B) Estimateur de Bézier

Soit α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et soit X une variable aléatoire réelle à densité continue et telle que $X(\Omega) = [\alpha, \beta]$. On appelle F_X sa fonction de répartition et on choisit $n + 1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \beta$.
On définit alors la famille de nombres complexes $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ par :

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n, P_k = x_k + iF_X(x_k).$$

Enfin on considère la courbe de Bézier associée à ces points $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ en posant, pour $t \in [0, 1]$, $G_n(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t) P_k$.

32. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{Im}(G_n) \circ (\mathrm{Re}(G_n))^{-1}(t)$ est bien définie sur $[\alpha, \beta]$ et est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité continue, notée X_n.

33. On choisit dans cette question, pour chaque entier $n \geqslant 1$, les $n + 1$ réels $x_k = \alpha + \frac{k}{n}(\beta - \alpha)$. Montrer que $(X_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers X.

34. On revient au cas général. Montrer que

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{i}}{\binom{2n-1}{i+k}} (F_X(x_{i+1}) - F_X(x_i))$$

35. Y-a-t-il convergence en moyenne quadratique ?

——— FIN DU SUJET ———