Exercice 01[Page.36 TERRACHER] Approximation de π

1. **Méthode d'Archimède** :
   On note $p_1 = 3$, $p_2 = 2\sqrt{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,$q_{n+1} = \dfrac{2p_nq_n}{p_n + q_n}$ et $p_{n+1} = \sqrt{p_nq_{n+1}}$. Montrer que (p_n) et (q_n) converge vers π puis déterminer à l'aide d'un programme Xcas, la valeur de n pour laquelle $|p_n - \pi| \leq 10^{-6}$ et $|q_n - \pi| \leq 10^{-6}$
2. **Méthode de Descartes** :
   On note $d_0 = \dfrac{3}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(d_n + \sqrt{d_n^2 + \dfrac{d_0^2}{4^n}}\right)$. Montrer que (d_n) converge vers $\dfrac{3}{\pi}$ puis déterminer à l'aide d'un programme Xcas, la valeur de n pour laquelle $|\dfrac{3}{d_n} - \pi| \leq 10^{-6}$
3. **Méthode de Wallis** :
   On note $w_1 = \dfrac{8}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} = \dfrac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+1)}w_n$. Montrer que (w_n) converge vers π puis déterminer à l'aide d'un programme Xcas, la valeur de n pour laquelle $|w_n - \pi| \leq 10^{-6}$
4. **Méthode de Gregory-Leibniz** :
   On note $G_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$
   Montrer que (G_n) converge vers $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi$ puis déterminer à l'aide d'un programme Xcas, la valeur de n pour laquelle $|G_n - \pi| \leq 10^{-6}$
5. Comparer les vitesses de convergence des suites ci-dessus puis classer ces suites dans les deux catégories "suites rapides" et "suites lentes".
6. Le procédé "Delta 2", inventé en 1926 par Alexandre Aïten, consiste à définir une suite $(t_n)_{n\geq 2}$ par :
   $$t_n = \frac{b_nb_{n-2} - b_{n-1}^2}{b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2}} \text{ pour } n \geq 2$$
   Montrer à l'aide de Xcas, que la convergence de (b_n) est bien accéléré.

Exercice 02[Page.26 TERRACHER] Approximation de $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et de $\sqrt{2}$ On considère les trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = 2 \\ b_{n+1} = \sqrt{b_n + 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0 = 2 \\ c_{n+1} = \dfrac{c_n^2 + 1}{2c_n - 1} \end{cases}$$

1. A l'aide d'un programme Xcas, conjecturer la convergence des suites (a_n), (b_n) et (c_n) et donner une valeur approchée de leur limite ϕ.
2. Apprécier leur rapidité de convergence en déterminant le premier terme qui approche ϕ à moins de 10^{-15}
3. Réaliser le même travail avec les suites ci-dessous, qui convergent vers un nombre facile à reconnaître.
   $$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{4}(-a_n^2 + 4a_n + 2) \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3} + \dfrac{4}{3b_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(c_n + \dfrac{2}{c_n}\right) \end{cases}$$

Exercice 03[Un classique à connaître par coeur] Approximation de π par la méthode de Monte-Carlo

Dans tout le problème, U désigne une v.a de loi uniforme sur $[0;1]$, g une fonction continue sur $[0;1]$ et on pose $J = \displaystyle\int_0^1 g(t)dt$.

1. Rappeler une densité de U.
2. Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J.
3. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i de même loi que U. On suppose que $\sigma^2 = V(g(U)) \neq 0$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$
   (a) Justifier que la suite de v.a. $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers J.
   (b) Justifier que la suite de v.a. $\left(\dfrac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a. de loi normale centrée réduite.
   (c) Sachant que $\Phi(1,96) = 0,975$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, déterminer un intervalle e confiance pour J, au niveau de confiance 95 %, faisant intervenir S_n
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}dt = \pi$ et en déduire un programme sous Xcas permettant de calculer une valeur approchée de π.

Exercice 04[p.75 DANTZER] On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. On note l leur limite commune.
2. Prouver que l n'est pas rationnel.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{n!} e^{1-x}\, dx$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$.
4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$ et en donner une approximation à 10^{-20} près.

Exercice 05[DEMAILLY] On se propose de déterminer une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près grâce à quatre méthodes itératives. On définit sur l'intervalle $[a,b]=[1,2]$ les fonctions $f(x)=x^2-2$ et $\phi(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$.

1. **Dichotomie** : cette méthode consiste « couper » l'intervalle en deux successivement.
   On a $a_0 = a, b_0 = b$ et $\forall n \geq 0, (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, c_n) \text{ si } f(a_n)f(c_n) < 0 \\ (c_n, b_n) \text{ si } f(a_n)f(c_n) \geq 0 \end{cases}, c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$
   Montrer que l'erreur absolue d'approximation vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, |c_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$.
2. **Point fixe** : on étudie la suite définie par $x_{n+1} = \phi(x_n)$.
   Montrer que l'erreur d'approximation vérifie : $|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}\left[2|x_0 - \sqrt{2}|\right]^{2^n}$
3. **Newton** : on remplace la courbe représentative de f par sa tangente. $x_{n+1} = x_n - \frac{f_n)}{f'(x_n)}$.
   Montrer que l'erreur d'approximation vérifie : $|x_n - \sqrt{2}| \leq |x_0 - \sqrt{2}|^{2^n}$.
4. **Sécante** : on remplace f' par le taux d'accroissement de f. $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$.
   on admet que l'erreur d'approximation vérifie : $|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{K}[K\max\{|x_0-\sqrt{2}|, |x_1 - \alpha|\}]^{F_n}$ où K est une constante et -F_n le n-ème terme de la suite de Fibonacci.
5. Comparer ces différentes méthodes de convergence, et donner une estimation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10}. Combien faut-il d'itérations pour chaque méthode ?

Exercice 06[Georges Skandalis]

1. Soit $(q_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres entiers strictement positifs. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, et pour $n \geq 1$ $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n q_n$ et $b_{n+1} = b_{n-1} + b_n q_n$
   (a) Quelle est la limite de la suite (b_n) ?
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{pmatrix}$$
   En déduire que l'on a $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   Dans la suite, on notera $y_n = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = [q_1, ..., q_n]$
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'écriture en "fraction continue" :
   $$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots\, q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$
   (d) Démontrer que les suites (y_{2n+1}) et (y_{2n}) sont adjacentes. En déduire que la suite (y_n) converge.
   (e) Soit x la limite de la suite (y_n). Démontrer que $0 < |x - y_n| < \frac{1}{b_{n+1}b_{n+2}}$
   (f) Démontrer que $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$