Exercice 01[Maths En Pratique (Liret)]
Evolution dune population en milieu fermé (bactéries en culture, lapin sur un îlot ...) **Equation logistique.**
- L'augmentation de la population due à la reproduction est proportionnelle à l'effectif initial.
- La compétition pour la nourriture induit une mortalité proportionnelle au carré de l'effectif initial.

1. Justifier qu'il existe $(k, a) \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$x'(t) = kx(t) - ax^2(t) \qquad (E)$$

2. Déterminer les solutions constantes de (E)
3. Déterminer les autres solutions de (E) suivant la valeurs de $x(0)$

Exercice 02[Maths En Pratique (Liret)]
Considérons une masse m suspendue à un ressort de raideur k. Si l'on écarte la masse de sa position d'équilibre son mouvement est régi par l'équation :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

où c est un coefficient d'amortissement (ex : frottement)

1. Déterminer l'expression de $x(t)$ si les oscillations sont non amorties. $(c = 0)$
2. Déterminer l'expression de $x(t)$ si les oscillations sont amorties. $(0 < c^2 < 4mk)$
3. Déterminer l'expression de $x(t)$ si l'amortissement est fort. $(c^2 > 4mk)$
4. Déterminer l'expression de $x(t)$ si l'amortissement est critique. $(c^2 = 4mk)$
5. On considère le même oscillateur non amorti sur lequel ont fait agir une force variable $f(t) = E\cos(\alpha t)$. Déterminer $x(t)$ en fonction de t.

Exercice 03[Maths En Pratique (Liret)]

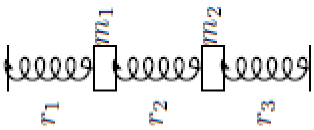
En économie, on distingue deux types de taux d'intérêt : un taux à court terme (c) et un taux à long terme (l). Tout changement de valeur pour l'un des taux a une répercussion sur l'autre. Voici un modèle simple pour les variations conjointes de c et de l au cours du temps :

$$\begin{cases} \dot{c} = a(r - c - \ell) \\ \dot{\ell} = b(r - c - \ell) \end{cases}$$

où r, a, b sont des constantes positives. a et b sont des vitesses d'évolution pour les taux c et ℓ. r s'interprète comme la valeur limite de $c+\ell$

1. Déterminer une condition pour avoir un point d'équilibre, puis, montrer que si $S(t) = (c(t), \ell(t))$ est solution, alors $bc(t) - a\ell(t)$ est constant.En déduire que les trajectoires sont rectilignes.
2. Montrer que la fonction constante $(c, \ell) = \left(\dfrac{ar}{a+b}, \dfrac{br}{a+b}\right)$ est une solution du système.
3. Déterminer un solution générale du système.
4. On considère les conditions initiales $C(0) = c_0$ et $\ell(0) = \ell_0$ où c_0 et ℓ_0 sont positifs. Déterminer $S(t)$ et montrer que le système obtenu tend vers un point d'équilibre quand $t \to +\infty$.

Exercice 04[Maths En Pratique(Liret)] Oscillations couplées



Dans le dispositif représenté ci-contre, les masses m_1 et m_2 sont fixées à des supports par l'intermédiaire de ressorts r_1 et r_3 et reliées entre-elles par le ressort r_2 ; l'ensemble est mobile verticalement. On appelle x_1 et x_2 l'écart de chacune des masses par rapport à sa position d'équilibre.

1. Montrer que les équations différentielles du mouvement des masses sont

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \end{cases}$$

2. On prend les masses unité et des ressorts de raideur $k_1 = 1, k_2 = 2$ et $k_3 = 4$. Calculer une base de solution, puis donner les équations vérifiées par le mouvement des masses.
3. à l'instant $t = 0$, on maintient la masse m_2 à l'équilibre et l'on écarte m_1 de la quantité algébrique $a \neq 0$. Montrer que le mouvement est donné par : $x_1(t) = \dfrac{4a}{5}\sin\sqrt{2}t + \dfrac{a}{5}\cos\sqrt{7}t$ et $x_2(t) = \dfrac{2a}{5}\sin\sqrt{2}t - \dfrac{2a}{5}\cos\sqrt{7}t$.

Exercice 05[Terracher Term S+ Promenade Mathématiques (Laroche)] Modèle proie prédateur
Lorsque deux populations animales interagissent, il est fréquent que le taux d'accroissement respectifs soient imbriqués. C'est le cas notamment avec les lynx (prédateurs) et les rongeurs (proies) sur un territoire clos du Canada.
Ce modèle a été proposé par Volterra en 1926. Si l'on note $L(t)$ et $r(t)$ les efectifs des lynx et des rongeurs au temps t, on suppose que les fonctions L et r vérifient le "système différentiel" :

$$(S) : \begin{cases} L' = L(-0,04 + 0,00005r) \\ r' = r(0,05 - 0,002L) \end{cases}$$

1. En l'absence de prédateurs, exprimer $r(t)$ en fonction de t et de $r(0)$
2. En l'absence de proies, exprimet $L(t)$ en fonction de t et de $L(0)$
3. Déterminer les points d'équilibre du système.
4. En admettant que toute solution du système est périodique, déterminer la moyenne de la fonction L puis celle de r sur une période $[0, T]$. Les comparer aux points d'équilibre du système.
5. En posant $u(t) = \dfrac{0,2L}{5}$, $v(t) = \dfrac{0,005r}{4}$, $\alpha = \dfrac{5}{4}$ et $x = -0,04t$
Montrer que $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = u(1 - v) \\ \dfrac{dv}{dx} = \alpha v(u - 1) \end{cases}$
6. En déduire que si u et v ne s'annule pas alors $\alpha\left(u' - \dfrac{u'}{u}\right) = \dfrac{v'}{v} - v'$ et déterminer une fonction implicite de (u, v) de la forme $f(u, v) = K$, $K \in \mathbb{R}$.