Développement 02 : Equations différentielles linéaires d'ordre deux

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 1.

On note $A : t \mapsto A(t)$ continue de $I \subset \mathbb{R} \to M_n(K)$ et $B : t \mapsto B(t)$ continue de $I \subset \mathbb{R} \to K^n$ alors le système (S) : $\begin{cases} X(t_0) = X_0 \\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \end{cases}$ admet une unique solution sur I.

I. Remarques

Si $X : t \mapsto X(t)$ est solution alors X est $C^1(I)$ car X est dérivable et comme X'=AX+B avec A et B continues alors X' est continue sur I.

De plus $\int_{t_0}^{t} X'(t)dt = \int_{t_0}^{t} (A(t)X(t) + B(t))dt = \int_{t_0}^{t} B(t)dt + \int_{t_0}^{t} A(t)X(t)dt$

Donc $X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} B(t)dt + \int_{t_0}^{t} A(t)X(t)dt$ (1)

II. Existence

On (X_n) la suite définie par $\begin{cases} X_0(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} B(t)dt \\ X_n(t) = \int_{t_0}^{t} A(t)X_{k-1}(t)dt \end{cases}$

Montrons que cette suite converge et que sa limite est solution de l'équation différentielle.

La suite (Xn) est de même nature que la série de terme général $u_n = X_n - X_{n-1}$.

Etudions donc la série $\sum_{k=1}^{n} u_n$

$X_n - X_{n-1} = \int_{t_0}^{t} A(s)(X_{n-1} - X_{n-2})(s)ds$ donc $\|X_n - X_{n-1}\| \leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \|(X_{n-1} - X_{n-2})(s)\| ds$

A est continue sur tout compact K de I donc est bornée et on note $M = \underset{s \in K}{Sup} \|A(s)\|$

Donc $\|X_n - X_{n-1}\| \leq M \int_{t_0}^{t} \|X_{n-1} - X_{n-2}\| ds$.

Montrons par récurrence que pour tt k, $\|X_k - X_{k-1}\| \leq \frac{D^k |t - t_0|^k}{k!}$ avec

$D = Sup\{1, M\|X_0\|\}$

Initialisation : $X_1 = X_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)X_0(s)ds$ donc $\|X_1 - X_0\| \leq M \int_{t_0}^{t} \|X_0(s)\| ds = C|t - t_0|$

Hérédité : On suppose que $\|X_k - X_{k-1}\| \leq \frac{C^k |t - t_0|^k}{k!}$

$\|X_{k+1} - X_k\| \leq M \left| \int_{t_0}^{t} \|X_k - X_{k-1}\| ds \right| \leq \frac{MC^k}{k!} \left| \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^k ds \right| = \frac{MC^k}{k!} \left| \frac{(t - t_0)^{k+1}}{k+1} \right|$

Donc $\|X_{k+1} - X_k\| \leq \frac{MC^k}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1} \leq \frac{D^{k+1}}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1}$ avec $D = Sup\{1, C\}$

Donc pou tout k, on a $\|X_k - X_{k-1}\| \leq \frac{D^k |t - t_0|^k}{k!}$. On a donc $\sum_{k=1}^{n} \|u_n\|$ convergente donc $\sum_{k=1}^{n} u_n$ est normalement convergente donc uniformément sur tout compact K de I donc convergente et donc (X_n) est convergente vers X vérifiant :

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} B(t)dt + \int_{t_0}^{t} A(t)X(t)dt$$

III. **Unicité** (Utilisation du Lemme de Gronwall)

On suppose que (S) admet deux solutions X et Y alors

$\|X(t) - Y(t)\| \leq \|X_0 - Y\|_0 + \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \|X(s) - Y(s)\| ds \right|$

On suppose que $t \geq t_0$

On pose $F(t) = \|X_0 - Y_0\| + M \int_{t_0}^{t} \|X - Y\| ds$ alors $F'(t) = M\|X(t) - Y(t)\| \leq MF(t)$

Or M positif donc $\|X(t) - Y(t)\| \leq F(t)$ et $F'(t) - MF(t) \leq 0$

Donc $[F'(t) - MF(t)]e^{Mt} \leq 0$ donc par intégration $F(t)e^{M(t-t_0)} - F(t_0)e^{M(t_0-t_0)} \leq 0$

Et sachant que $F(t_0) = \|X_0 - Y_0\|$

On a donc $F(t)e^{M(t-t_0)} \leq \|X_0 - Y_0\|$ donc $\|X(t) - Y(t)\| \leq F(t) \leq \|X_0 - Y_0\| e^{M(t-t_0)}$

Or X et Y sont solutions de (S) donc $X_0 = Y_0$ donc

$0 \leq \|X(t) - Y(t)\| \leq 0$ et $X(t) = Y(t)$

On peut faire le même raisonnement pour $t \leq t_0$

Il y a donc unicité des solutions.