Pré-requis : Séries à termes réels, Dénombrement, Tribus, Espaces probabilisés et généralité sur les v.a.r. **Notations** : (Ω, A, p) une espace probabilisé.

I Définition et Propriétés

Définition : Variable aléatoire discrète

Une **variable aléatoire discrète** X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ où $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
On note : $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$

Définition : Loi de probabilité

On nomme **loi de probabilité** de la variable aléatoire discrète X, l'ensemble des couples $(x_i, p_i)_{i\in I}$ tels que :

$$\begin{cases} x_i \in X(\Omega) \\ p_i = P(X = x_i) \end{cases}$$

Propriété : Loi de probabilité

1. $\sum\limits_{i\in I} P(X = x_i) = 1$
2. $\forall i \in I$, $P(X = x_i) \geqslant 0$

Exemples :
Loi Bernoulli $B(p)$, Binomiale $B(n,p)$, Hypergéométrique $H(N,n,p)$, Géométrique $G(p)$ et Poisson $P(\lambda)$.

Propriété : Loi d'une fonction de v.a.r.d

Si g est une fonction numérique définie sur $X(\Omega)$ alors $Y = g(X)$ est une v.a.r.d et :

$$Y(\Omega) = \{y \in \mathbb{R} / \exists i \in I \text{ tq } y = g(x_i)\}$$
$$\forall y \in Y(\Omega),\ P(Y = y) = \sum_{i/g(x_i)=y} P(X = x_i)$$

Définition : Fonction de répartition

On nomme **fonction de répartition** de X, la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto F(x) = P(X \leqslant x) = \sum\limits_{x_i \leqslant x} P(X = x_i)$

Propriétés de la fonction de répartition

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0; 1]$
2. F est croissante sur $\mathbb{R}$ et continue à droite.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
4. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $P(a < x \leqslant b) = F(b) - F(a)$

Théorème

Si $X(\Omega) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}*}$ dans l'ordre croissant alors $P(X = x_1) = F(x_1)$ et $\forall i > 1$, $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

II Espérance, variance et écart-type

Définition : Espérance

Si I est fini ou $\sum_{i\in I} x_i P(X=x_i)$ converge absolument, alors on nomme **espérance** de X la valeur de :

$$E(X)=\sum_{i\in I} x_i P(X=x_i)$$

Exemples :
Loi Bernoulli $B(p)$, Binomiale $B(n,p)$, Hypergéométrique $H(N,n,p)$, Géométrique $G(p)$ et Poisson $P(\lambda)$.
Contre-exemple : $P(X=3^k)=\dfrac{2}{3^{k+1}}$ avec $k\in\mathbb{N}$ (N'admet pas d'espérance)

Théorème de transfert

Si I est fini ou si $\sum_{i\in I} g(x_i)P(X=x_i)$ converge absolument alors la v.a.r.d $g(X)$ admet une espérance et :

$$E(g(X))=\sum_{i\in I} g(x_i)P(X=x_i)$$

Ex : Si X^2 admet une espérance, alors $E(X^2)=\sum_{i\in I} x_i^2 P(X=x_i)$

Définition : Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans N.
On définit sa fonction génératrice G_X par : $G_X(s)=E(s^k)=\sum_{k\in I} s^k P(X=k)$ pour s dans le disque ouvert de convergence de la série entière.

Exemples : Loi Bernoulli $B(p)$, Binomiale $B(n,p)$, Géométrique $G(p)$ et Poisson $P(\lambda)$.

Propriétés de la fonction génératrice

- $\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=\dfrac{G_X^{(k)}}{k!}$
- Si le rayon de convergence est >1 alors $E(X)=G'_X(1)$

Définition : Variance et écart-type

Si I est fini ou si $\sum_{i\in I}(x_i-E(x))^2P(X=x_i)$ converge absolument alors on nomme **variance** de X la valeur de :

$$V(X)=\sum_{i\in I}(x_i-E(x))^2P(X=x_i)$$

et **écart-type** de X : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Exemples : Loi Bernoulli $B(p)$, Binomiale $B(n,p)$, Hypergéométrique $H(N,n,p)$, Géométrique $G(p)$ et Poisson $P(\lambda)$.

Théorème

Si X^2 admet une espérance alors $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

Propriétés

- Si X admet une espérance et une variance alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $aX+b$ admet une espérance et une variance et

$$E(aX+b) = aE(X)+b \qquad V(aX+b) = a^2V(X)$$

- Si X et Y admettent une espérance alors $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$
- Si X et Y admettent une variance et sont indépendantes alors $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$

III Exemples

Définition : Convergence en loi

	Uniforme	Bernouilli	Binomiale	Hypergéométrique	Géométrique	Poisson
Notation	$U([\|1;n\|])$	$B(p)$	$B(n,p)$	$H(N,n,p)$	$G(p)$	$P(\lambda),\ \lambda>0$
$X(\Omega)$	$[\|1;n\|]$	$\{0;1\}$	$[\|0;n\|]$	$[\|Max(0;n-N(1-p));min(n;Np)\|]$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}$
Loi	$P(X=i)=\frac{1}{n}$	$P(X=1)=p$ et $P(X=0=1-p)$	$C_k^n p^k(1-p)^{n-k}$	$\frac{C_k^{Np}C_{n-k}^{N(1-p)}}{C_n^N}$	$p(1-p)^{k-1}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
$E(X)$	$\frac{n+1}{2}$	p	np	np	$\frac{1}{p}$	λ
$V(X)$	$\frac{n^2-1}{2}$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	$\frac{N-m}{N-1}np(1-p)$	$\frac{1}{p^2}(1-p)$	λ
$\sigma(X)$	$\sqrt{\frac{n^2-1}{2}}$	$\sqrt{p(1-p)}$	$\sqrt{np(1-p)}$	$\sqrt{\frac{N-m}{N-1}np(1-p)}$	$\sqrt{\frac{1}{p^2}(1-p)}$	$\sqrt{\lambda}$
$G_X(s)$	$\frac{1}{n+1}\frac{1-s^{n+1}}{1-s}$	$1-p+ps$	$(1-p+ps)^n$		$\frac{ps}{1-(1-p)s}$	$e^{-\lambda(1-s)}$

Théorème

Définition : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r.d. et X une v.a.r.d sur un même espace probabilisé. On note F_n la fonction de répartition de X_n et F la fonction de répartition de X.On dit que (X_n) **converge en loi** vers (X) si : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)=F(x)$ en tout point de continuité de F.

Théorème 1 : $B\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)\underset{Loi}{\longrightarrow}P(\lambda)$ **Théorème 2 :** $H\left(N,n,p\right)\underset{Loi}{\longrightarrow}B(n,p)$

Bibliographie : Escoffier / Bréal ECS 1ère année / Ouvrard / Ellipse ISTAS / Probabilités pour scientifiques et ingénieurs Bogaert