E désigne un e.v.e. de dim. finie n et F un s.e.v. de E. $(e_i)_{i\in\{1,..,n\}}$ une base de E. $f \in \mathcal{L}(E)$.

I Généralités

I.1 Endomorphismes symétriques et matrices symétriques

Définition 1-
*On dit que f est **symétrique** (ou **auto-adjoint**) ssi* $\forall (x,y) \in E^2, < f(x), y >=< x, f(y) >$.

Proposition 1-
f est symétrique si et seulement si pour tout $(i,j) \in \{1,..,n\}^2$ $< f(e_i), e_j >=< e_i, f(e_j) >$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E. $\mathcal{S}(E)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 2-
Soit $(E, < .,. >)$ un e.v.e., $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, on a : $f \in \mathcal{S}(E) \iff A \in S_n(\mathbb{R})$.

Remarque 1-
Oral : Si la $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ avec $\mathcal{B}$ b.o.n de E, est symétrique réelle, sa matrice dans toute base orthonormé de E est symétrique réelle.

Proposition 3-
- $\forall f, g \in \mathcal{S}(E), (g \circ f \in \mathcal{S}(E) \iff g \circ f = f \circ g)$,
- $\forall f \in \mathcal{S}(E), \forall k \in \mathbb{N}, f^k \in \mathcal{S}(E)$,
- $\forall f \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{GL}(E), \forall k \in \mathbb{Z}, f^k \in \mathcal{S}(E)$.

Remarque 2-
Oral : En particulier, l'inverse d'un endo sym est symétrique.

Exemple 1-
Les projections orthogonales, symétrie orthogonales et homotéthies sont des endomorphismes symétriques.

II Réductions des matrices symétriques

II.1 Théorème spectral

Lemme 1-
1. f admet au moins une valeur propre.
2. Les vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux, donc les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 1-
f est diagonalisable et il existe uen base orthonormée de E constituée de vecteurs propores de E.

Corollaire 1-
Toute matrice symétrique réelle A d'ordre n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et il existe une matrice orthogonale P de $M_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $D =^t PAP$.
Oral : On dit qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1-
$A \in S_n$ telle que $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tq $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$

II.2 Matrices symétriques positives ou définies positives

Définition 2-
1. *On dit que $A \in S_n(\mathbb{R})$ est positive ($\in S_n^+$) si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),^t XAX \geq 0$*
2. *On dit que $A \in S_n(\mathbb{R})$ est définie-positive ($\in S_n^{++}$)si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},^t XAX > 0$*

Théorème 2-
1. $S \in S_n^+ \Leftrightarrow S_{p\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}^+$
2. $S \in S_n^{++} \Leftrightarrow S_{p\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}^{+*}$
3. $S \in S_n^{++} \Leftrightarrow \forall k \in \{1,..,n\} det\,(A_k) > 0$ où les $A_k = (a_{ij})$ avec $(i,j) \in \{1,..,k\}$ et $k \in \{1,..,n\}$

III Applications

III.1 Racine carrée dans S_n^+

Théorème 3-
Soit $A \in S_n^+$. Il existe R symétrique telle que $A = R^2$
Rm : Si A_n^{**} alors R est inversible.

III.2 Décomposition polaire ΩS

Théorème 4-
$M \in GL_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale Ω et une matrice symétrique inversible S telles que $M = \Omega S$

III.3 Décomposition de Cholevski $A =^t TT$

Théorème 5-
Toute matrice symétrique définie positive A peut s'écrire de façon unique $A =^t TT$ où T est triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs.

III.4 Réduction des formes quadratiques

Exercice 2-

1. Equation réduite de la conique d'équation $x^2 + xy + y^2 + x + y + \frac{1}{4} = 0$
2. Equation réduite de la quadrique d'équation $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz + 2yz + 5y = 1$

III.5 Topologie

Théorème 6-

1. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(R)$
2. $S_n^{++}(R)$ est une partie convexe de $M_n(R)$