Pre-Requis :
Espaces vectoriels sur un corps K, $dim(E) = n$, applications linéaires, multilinéaires, Matrices, permutation d'un ensemble fini.
Notations :
E un espace vectoriel sur K commutatif et de caractéristique différente de 2.
$\mathfrak{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in M_n(K)$
Pour tout $j \in \{1, .., n\}$: $\exists(\lambda_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de K tels $x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i$ et $\exists(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de K tels $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

I Définitions

Définition 01 : Déterminant d'une famille de vecteurs

Théorème : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un K-espace vectoriel de dimension 1.
Pour toute base $\mathfrak{B}$ de E, il existe une unique forme n-linéaire alternée sur E valant 1 sur $\mathfrak{B}$
Définition : Cette unique forme n-linéaire alternée est appelée Déterminant dans la base $\mathfrak{B}$: $\det_{\mathfrak{B}}$

Théorème 01 : Déterminant d'une famille, d'endomorphisme et d'une matrice

Famille de vecteurs : $det_{\mathfrak{B}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma\in\sigma_n} \varepsilon(\sigma)\lambda_{\sigma(1)1}...\lambda_{\sigma(n)n}$
Endomorphisme et matrice : $det_{\mathfrak{B}}(u) = det_{\mathfrak{B}}(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ et $det(M) = det(C_1, C_2, ..., C_n)$

Proposition 01 : Matrice d'un endomorphisme

Si M est la matrice de u dans la base $\mathfrak{B}$ alors $det_{\mathfrak{B}}(M) = det_{\mathfrak{B}}(u)$

Proposition 02 : Relation de Chasles

$\mathfrak{B}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ une autre base de E :

$$det_{\mathfrak{B}'}(x_1, .., x_n) = det_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B}) det_{\mathfrak{B}}(x_1, .., x_n)$$

II Propriétés

Propriété 01 : Famille libre

Une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $det_{\mathfrak{B}}(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$

Exemple : Montrer que la famille $((1, 1, 0)(4, 1, 4), (2, -1, 4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Notations :$(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$, $(M, N) \in (M_n(K))^2$, $\varphi \in aut(E)$, $P \in GL_n(E)$.

Théorème 02 : Déterminant d'un endomorphisme ou d'une matrice

	Pour les endomorphisme	Pour les matrices
1)	$det_{\mathfrak{B}}(u(e_1), .., u(e_n)) = det_{\mathfrak{B}'}(u(e'_1), .., u(e'_n))$	
2)	$det(Id) = 1$	$det(I_n) = 1$
3)	$det(\lambda u) = \lambda^n det(u)$	$det(\lambda M) = \lambda^n det(M)$
4)	$det(u \circ v) = det(u) \times det(v)$	$det(M \times N) = det(M) \times det(N)$
5)	u inversible $\Leftrightarrow det(u) \neq 0$ et $\det(u^{-1})) = (det(u))^{-1}$	M inversible $\Leftrightarrow det(M) \neq 0$ et $det(M^{-1})) = (det(M))^{-1}$

III Calculs pratiques et exemples

Méthode 01 : Développement suivant une ligne ou colonne

Prop : $det_{\mathfrak{B}}(x_1, .., x_i, .., x_n) = det_{\mathfrak{B}}\left(x_1, .., x_i + \sum_{1 \leqslant j \neq i \leqslant n}^{n} a_j x_j, , .., x_n\right)$

Ligne	Colonne
$det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} det(M_{ij})$	$det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} det(M_{ij})$

où les M_{ij} sont les mineurs de la matrice M.

Méthode 02 : Matrice triangulaire

$$det(M) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Méthode 03 : Matrice triangulaire par blocs

Soient A, B, C et D des matrices carrées d'ordre n :

$$det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = det(A) \times det(B)$$

Exercice : Trouver pour quelles conditions $det\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} = det(AB - DC)$

Exemple classique

1. Vandermonde : $\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)$

IV Applications

IV.1 Algèbre

Application Algèbre 01 : Réductions des endomorphismes

$$Spec(u) = P^{-1}(\{0\}) \text{ avec } P = det(u - \lambda Id)$$

Exemple : Déterminer les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Application Algèbre 02 : Système de Cramer

Si le système linéaire $AX = B$ est de Cramer ($det(A) \neq 0$) alors $x_i = \dfrac{det(C_1, C_2.., C_{i-1}, B, C_{i+1}, .., C_n)}{det(A)}$

Exemple : Résoudre $\left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 4z = -7 \\ 5x + 7y - 3z = 16 \\ x + y - z = 6 \end{array} \right.$

Application Algèbre 05 : Inverse d'une matrice

Pour toute matrice M, $det(M)I_n = M \times^t Com(M)$

Exemple : Inverse de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ad - bc} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$

Exemple : Calculer l'inverse de $M = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Application Algèbre 06 : Résultants et discriminants

Si on note $f(z) = a_n z^n + ... + a_0$ et $g(z) = b_m z^m + ... + b_0$ alors on note résultant de (f, g) ou déterminant de Sylvester, le déterminant de la matrice carrée de taille $(m + n)$:

$$\begin{vmatrix} a_n & 0 & & 0 & b_m & 0 & & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & & b_{m-1} & b_m & & \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & \vdots & \vdots & b_{m-1} & \ddots & \vdots \\ a_0 & \vdots & & a_n & b_0 & \vdots & & b_m \\ 0 & a_0 & & a_{n-1} & 0 & b_0 & & b_{m-1} \\ & 0 & \ddots & \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_0 & 0 & 0 & & b_0 \end{vmatrix}$$

Développement

Théorème : Un polynôme $f \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 2$ possède une racine multiple si et seulement si

$$Dis(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{Res(f, f')}{a_n} = 0$$

Exemple : Discriminant de $f(z) = az^2 + bz + c$ et de $f(z) = z^3 + pz + q$

IV.2 Géométrie

Application Géométrie 06

1. **Produit mixte** : Dans R^3, $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.
2. **Calcul d'aire et de volume** :Dans $\mathbb{R}^2$, $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est **l'aire du parallélogramme** engendré par les deux vecteurs. Dans R^3, $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est **le volume du parallélépipède** engendré par les trois vecteurs.
3. **Colinéarité** : u et v colinéaires $\Leftrightarrow \forall (i,j) \in \{1,..,n\}^2 \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = 0$
4. **Points alignés** :$A_0(x_0,y_0)$, $A_1(x_1,y_1)$ et $A_2(x_2,y_2)$ sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$
5. **Points cocycliques** :$M(x,y)$ appartient au cercle circonscrit à $A_0(x_0,y_0)$, $A_1(x_1,y_1)$ et $A_2(x_2,y_2)$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_0^2+y_0^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x^2+y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6. **Orientation de l'espace** : La relation R définie dans l'ensemble B des bases de E, en posant : $\mathfrak{B} R \mathfrak{B}' \Leftrightarrow det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}') > 0$ est une relation d'équivalence et B/R est de cardinal 2.

IV.3 Analyse

Application Analyse 07 : Changements de variable

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, φ un C^1-difféomorphisme de U dans V et $J(\varphi)$ le jacobien de φ. Si $f : V \to \mathbb{R}$ intégrable, alors $(f \circ \varphi)|J(\varphi|$ est intégrable sur U et :

$$\int_V f(v)dv = \int_U f(\varphi(u))|J(\varphi)(u)|du$$

Exemple : Intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

Application Analyse 08 : Equations différentielles

Soit $\{y_1,y_2,..,y_n\}$ une famille de n solutions de l'équation homogène (E) : $a_n y^{(n)} + ... + a_0 y = 0$.
On dit que la famille $\{y_1,y_2,..,y_n\}$ est un système fondamental de solutions de (E_1) si $\{y_1,y_2,..,y_n\}$ est une base de l'espace vectorielle des solutions de (E).
Théorème :
$\{y_1,y_2,..,y_n\}$ est un système fondamental de solutions de (E_1) si et seulement si il existe $t_0 \in I$ tel que :

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & \dots & y_n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

et

$$W(t) = W(t_0)exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)}ds\right)$$

Exemple : Résolution de $y'' + tanxy' + 2y = 0$